Osnove matematične analize
Vaje, 11. teden

1. * Naj bo $f(x,y) = y(x^2-1)$.
   (a) Nariši nivojnice in poišči pot od točke $(-2,1,3)$ do točke $(2,-1,-3)$, ki se nikjer ne vzpenja.
   (b) V kateri smeri bi morali začeti spust iz točke $(2,0)$, če bi se želeli spuščati po poti s tretjino maksimalne možne strmine?

Rešitev: (a) Nivojnice so krivulje $y = \frac{a}{x^2-1}$ za $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in pa premice $y=0$, $x=1$, $x=-1$ pri $a=0$. (b) V smeri vektorja $(\pm 2\sqrt{2}, -1)$.

2. * Med točkami (x,y) v ravnini, ki zadoščajo zvezi $y = \frac{1}{x}$, poišči tiste, za katere je $f(x,y) = x^2+y^2$ najmanjša. Rezultat geometrijsko interpretiraj.

Rešitev: $(1,1)$ in $(-1,-1)$.

3. Dana je funkcija $f(x,y) = \left(x^2 + \frac{3}{4}\right) \cdot e^{-x^2-y^2}$. Poišči lokalne ekstreme in pri vsakem ugotovi, za katero vrsto ekstrema gre.

Rešitev: $(\frac{1}{2}, 0)$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$ sta lokalna maksimuma.

4. Določi vse stacionarne točke funkcije
   (a) * $f(x,y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x$,
   (b) * $f(x,y) = x^4 + y^4 - 36xy$,
   (c) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$.

Rešitve:

(a) $(5,0)$ je lokalni minimum, $(-5,0)$ lokalni maksimum, $(3,4)$ in $(-3,-4)$ sta sedli,

(b) $(0,0)$ je sedlo, $(3,3)$ in $(-3,-3)$ sta lokalna minimuma,

(c) $(0,0)$ je lokalni maksimum, $(2,0)$ je lokalni minimum.

5. Poišči minimum in maksimum funkcije $f(x,y) = xy$ na krogu
$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Rešitev: V notranjosti kroga ni ekstremov (točka $(0,0)$ je sedlo). Na krožnici sta minimuma v $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, maksimuma sta v $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

6. * Na voljo imamo l metrov dolgo tanko palico. Iz nje izrežemo 12 krajših palic, iz katerih je mogoče sestaviti ogrodje kvadra. Izračunaj, kako dolge stranice kvadra moramo izrezati, da bomo dobili kvader z največjo možno površino.

Rešitev: Površina bo največja, ko bo kvader kocka.

7. Na kakšne kose moramo razrezati l metrov dolgo palico, da bo ploščina osnovne ploskve dobljenega kvadra enaka A, kvader z izrezanim skeletom pa bo imel največji možni volumen?

Rešitev: Volumen bo največji, ko bo osnovna ploskev kvadrat, tj. $x = y = \sqrt{A}$ in $z = \frac{l}{4} - 2\sqrt{A}$.