Rešitve 1. kolokvija
(8.12.2022)

1. naloga (25 točk)

Z uporabo matematične indukcije utemelji, da za vsako naravno število $n \geq 1$ velja:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

1. Baza: $n=1$:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \\ D &= 2-\frac{1+2}{2^1}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} L=D \checkmark$$

2. Indukcijski korak: $n \to n+1$:

Predpostavimo: $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$

Dokazujemo: $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+3}{2^{n+1}}$

Računamo: $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=$

$$2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=$$

$$2-\left(\frac{n+2}{2^n}+\frac{-n-1}{2^{n+1}}\right)=$$

$$2-\frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}}=$$

$$2-\frac{n+3}{2^{n+1}} \checkmark$$

2. naloga (25 točk)

Trimestni izjavni veznik T je dan z opisom

$T(p,q,r)$ ima vrednost 1 natanko tedaj, ko je vrednost r enaka vrednosti p ali vrednosti q.

a) (5 točk) Zapiši resničnostno tabelo za $T(p,q,r)$ in zapiši $T(p,q,r)$ v disjunktivni normalni obliki.

$$T(p,q,r) \equiv (r \Leftrightarrow p) \vee (r \Leftrightarrow q)$$

p	q	r	$T(p,q,r)$
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

DNO: $T(p,q,r) \sim$
$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$
$$\vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

b) (5 točk) Le z uporabo veznika T in logične konstante 0 zapiši izjavna izraza $p \Rightarrow q$ ter $p \Leftrightarrow q$.

$$p \Rightarrow q \sim T(q, 0, p)$$

$$p \Leftrightarrow q \sim T(q, q, p)$$

c) (15 točk) Kateri izmed naborov $\{T\}$, $\{T, \Rightarrow\}$, $\{T, 0\}$, $\{T, \neg\}$ so polni nabori? Zakaj oz. zakaj ne? *Natančno utemelji!*

- $\{T\}$: ni poln, saj je $T(1,1,1) \sim 1$
- $\{T, \Rightarrow\}$: ni poln, saj je $T(1,1,1) \sim 1$ in $1 \Rightarrow 1 \sim 1$
- $\{T, 0\}$: je poln, saj je $\{\Rightarrow, 0\}$ poln in $p \Rightarrow q \sim T(q, 0, p)$
- $\{T, \neg\}$: je poln, saj je $\{T, 0\}$ poln in $0 \sim T(p, p, \neg p)$

3. naloga (25 točk)

Dana sta sklepa

$$\neg q \Rightarrow r \wedge t \,,\; r \vee \neg t \Rightarrow \neg p \wedge s \models p \wedge q,$$
$$\neg q \Rightarrow r \wedge t \,,\; r \vee \neg t \Rightarrow \neg p \wedge s \models p \Rightarrow q.$$

Ali sta sklepa pravilna? Zakaj oz. zakaj ne? *Če je sklep pravilen, zapiši dokaz, če je nepravilen, poišči protiprimer.*

$$\begin{array}{l|c}
\neg q \Rightarrow r \wedge t & 1 \\
r \vee \neg t \Rightarrow \neg p \wedge s & 1 \\
\hline
p \wedge q & 0
\end{array}$$

Prvi sklep ni pravilen, saj imamo protiprimer: $p \sim 0$, $q \sim 0$, $r \sim 1$, $s \sim 1$, $t \sim 1$.

Drugi sklep je pravilen, kar dokažemo s pravili sklepanja:

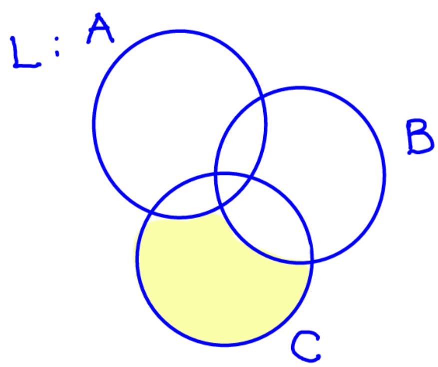
1.	$\neg q \Rightarrow r \wedge t$	pred.
2.	$r \vee \neg t \Rightarrow \neg p \wedge s$	pred.
3.1	$\neg(p \Rightarrow q)$	pred. RA
3.2	$\neg(\neg p \vee q)$	$\sim$ (3.1)
3.3	$p \wedge \neg q$	$\sim$ (3.2)
3.4	p	Po (3.3)
3.5	$\neg q$	Po (3.3)
3.6	$r \wedge t$	MP (1, 3.5)
3.7	r	Po (3.6)
3.8	$r \vee \neg t$	Pd (3.7)
3.9	$\neg p \wedge s$	MP (2, 3.8)
3.10	$\neg p$	Po (3.9)
3.11	$p \wedge \neg p$	Zd (3.4, 3.10)
3.12	0	$\sim$ (3.11)
3.	$p \Rightarrow q$	RA (3.1, 3.12)

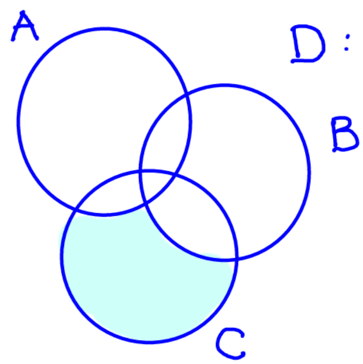
4. naloga (25 točk)

Naj bodo A, B in C poljubne množice.

a) (15 točk) Ali velja enakost

$$((B + C) \setminus B) \cap A^c = C \setminus (B \cup A)?$$



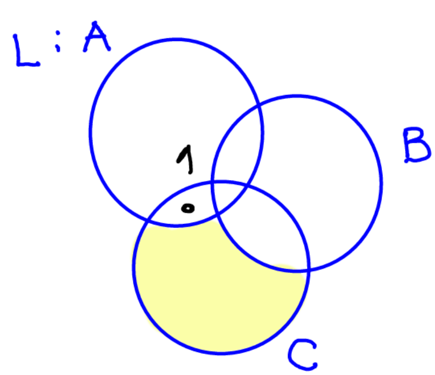


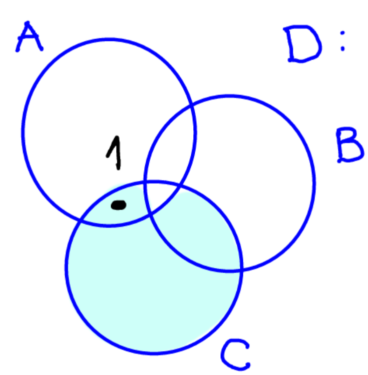
Enakost velja. Dokaz:

$$
\begin{aligned}
&((B+C)\setminus B)\cap A^c = \\
&= (((B\setminus C)\cup(C\setminus B))\setminus B)\cap A^c = \\
&= (((B\cap C^c)\cup(C\cap B^c))\cap B^c)\cap A^c = \\
&= ((B\cap C^c\cap B^c)\cup(C\cap B^c\cap B^c))\cap A^c = \\
&= (\emptyset \cup (C\cap B^c))\cap A^c = \\
&= C\cap B^c\cap A^c = \\
&= C\cap(B\cup A)^c = \\
&= C\setminus(B\cup A)
\end{aligned}
$$

b) (10 točk) Kaj pa enakost

$$((B+C)\setminus B)\cap A^c = C\setminus(B\cap A)?$$





Enakost ne velja. Protiprimer: $A = C = \{1\}$
$B = \emptyset$

$$
\begin{aligned}
L &= ((B+C)\setminus B)\cap A^c = ((\emptyset+\{1\})\setminus\emptyset)\cap\{1\}^c = \\
&= (\{1\}\setminus\emptyset)\cap\emptyset = \{1\}\cap\emptyset = \emptyset
\end{aligned}
$$

$$D = C\setminus(B\cap A) = \{1\}\setminus(\emptyset\cap\{1\}) = \{1\}\setminus\emptyset = \{1\}$$

$$L \neq D \checkmark$$