Ime in priimek

Vpisna številka

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| Σ | |

**Diskretne strukture: prvi računski izpit**

17. januar 2023

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Uporaba kalkulatorja ali drugih pripomočkov ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji!

**1. naloga (25 točk)**

Dan je sklep

$$p \wedge q \Rightarrow \neg t,\ s \vee t,\ q \wedge r \quad \models \quad p \Rightarrow r \wedge s\,.$$

**a) (15 točk)** Prepričaj se, da je ta sklep pravilen, tako da zapišeš formalen dokaz tega sklepa.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $p \wedge q \Rightarrow \neg t$ | pred. |
| 2. | $s \vee t$ | pred. |
| 3. | $q \wedge r$ | pred. |
| 4. | $q$ | Po(3) |
| 5.1. | $p$ | pred. PS |
| 5.2. | $p \wedge q$ | Zd(5.1, 4) |
| 5.3. | $\neg t$ | MP(5.2, 1) |
| 5.4. | $s$ | DS(2, 5.3) |
| 5.5. | $r$ | Po(3) |
| 5.6 | $r \wedge s$ | Zd(5.5, 5.4) |
| 5. | $p \Rightarrow r \wedge s$ | PS(5.1, 5.6) |

**b) (10 točk)** Preveri, da je sklep napačen, če predpostavko $q \wedge r$ zamenjamo s $q$.

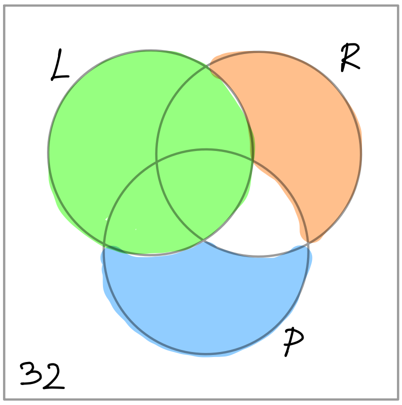
$$\underbrace{p \wedge q \Rightarrow \neg t}_{1},\ \underbrace{s \vee t}_{1},\ \underbrace{q}_{1} \models \underbrace{p \Rightarrow r \wedge s}_{0}$$

$p \sim 1$
$q \sim 1$
$r \sim 0$
$s \sim 1$
$t \sim 0$

To je protiprimer.

**2. naloga (25 točk)**

V razredu je 32 dijakov. Od prvega do tretjega letnika so imeli organizirane tri izbirne ekskurzije. V London je potovalo 23 dijakov. Noben dijak ni šel samo v Rim, izključno v Prago so šli 3 dijaki. V obe mesti, Rim in London, je potovalo 21 dijakov, v Prago in London 20 dijakov, v Rim in Prago 22 pa dijakov. Nobene ekskurzije se niso udeležili štirje dijaki iz razreda. Koliko dijakov se je udeležilo vseh treh ekskurzij?




$|L| = 23$

$|R \setminus (L \cup P)| = 0$

$|P \setminus (L \cup R)| = 3$

$|L \cap R| = 21$

$|L \cap P| = 20$

$|R \cap P| = 22$

$|L \cup R \cup P| = 32 - 4 = 28$

Pišimo $x = |L \cap R \cap P|$, tedaj:

$$|R \setminus (L \cup P)| = |R| - |\underbrace{R \cap (L \cup P)}_{R \cap L \,\cup\, R \cap P}| = |R| - |R \cap L| - |R \cap P| + x$$

in zato $|R| = |R \setminus (L \cup P)| + |R \cap L| + |R \cap P| - x$.

Podobno:

$$|P \setminus (L \cup R)| = |P| - |\underbrace{P \cap (L \cup R)}_{P \cap L \,\cup\, P \cap R}| = |P| - |P \cap L| - |P \cap R| + x$$

in zato $|P| = |P \setminus (L \cup R)| + |P \cap L| + |P \cap R| - x$.

Končno:

$$\underbrace{|L \cup R \cup P|}_{28} = |L| + |R| + |P| - |L \cap R| - |L \cap P| - |R \cap P| + \overbrace{|L \cap R \cap P|}^{= x} =$$

$$= \underbrace{|L|}_{23} + \underbrace{|R \setminus (L \cup P)|}_{0} + \cancel{|L \cap R|} + \underbrace{|R \cap P|}_{22} - x +$$

$$+ \underbrace{|P \setminus (L \cup R)|}_{3} + \cancel{|L \cap P|} + \cancel{|R \cap P|} - \cancel{x} -$$

$$- \cancel{|L \cap R|} - \cancel{|L \cap P|} - \cancel{|R \cap P|} + \cancel{x} =$$

$$= 48 - x.$$

Torej $28 = 48 - x \;\ldots\; x = 20$. 20 dijakov se je udeležilo vseh treh ekskurzij.

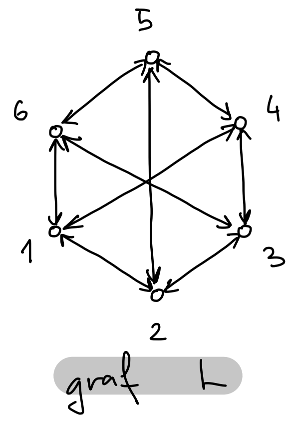
**3. naloga (25 točk)**

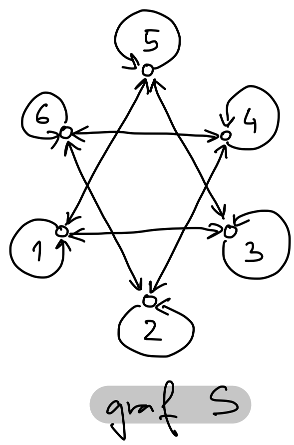
Na množici $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sta dani relaciji $L$ in $S$ z opisoma:

$$aLb \text{ natanko tedaj, ko je } a-b \text{ liho število,}$$
$$aSb \text{ natanko tedaj, ko je } a-b \text{ sodo število.}$$

(Pri tem je $\{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$ množica lihih, $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ pa množica sodih števil.)

**a) (10 točk)** Čimbolj pregledno nariši grafa relacij $L$ in $S$.




**b) (10 točk)** Ali je katera od relacij $L$ in $S$ ekvivalenčna? Zakaj oz. zakaj ne? Za vsako od ekvivalenčnih relacij določi ekvivalenčne razrede in opiši kvocientno množico.

$L$ ni ekvivalenčna, saj ni refleksivna – namreč $\neg(1L1)$.

$S$ je ekvivalenčna:

- refleksivnost: $aSa$ … $a-a=0$, kar je sodo
- simetričnost: $aSb$ pomeni $a-b=2k$, torej je $b-a=2\cdot(-k)$, kar pomeni $bSa$.
- tranzitivnost: $aSb \wedge bSc$ pomeni $a-b=2k$ in $b-c=2l$, torej $(a-b)+(b-c)=2(k+l)$ oz. $a-c=2(k+l)$, kar pomeni $aSc$.

$A/S = \{[1]_S, [2]_S\}$, $[1]_S = \{1,3,5\}$, $[2]_S = \{2,4,6\}$.

**c) (5 točk)** Ali je relacija $L * S$ enaka relaciji $S * L$? Zakaj? Ali je $L * S$ kar relacija $A \times A$ na $A$? Zakaj?

$a(L*S)b$ pomeni, da je $a-b$ sodo + liho = liho, torej $L*S=L$.

$a(S*L)b$ pomeni, da je $a-b$ liho + sodo = liho, torej $S*L=L$.

Torej $L*S=S*L$.

$L*S = L \neq A\times A$, tj. $L*S \neq A\times A$.

**4. naloga (25 točk)**

Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 3 & 5 & 9 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ in } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

**a)** Zapiši permutaciji $\alpha$ in $\beta$ kot produkt disjunktnih ciklov. Določi parnost permutacij $\alpha$ in $\beta$.

6 $\alpha = (1\ 7\ 2\ 8)(3)(4\ 5\ 9\ 6)$, $\beta = (1\ 3\ 4\ 5)(2)(6\ 9)(7\ 8)$.

2 $\alpha$ je soda $\big((4-1) + (1-1) + (4-1) = 6$ je sodo število$\big)$.

$\beta$ je liha $\big((4-1) + (1-1) + (2-1) + (2-1) = 5$ je liho število$\big)$.

**b)** Kot produkt disjunktnih ciklov zapiši permutaciji $\alpha^2 * \beta$ ter $\alpha * \beta * \alpha$.

4 $\alpha^2 * \beta = \big((1\ 7\ 2\ 8)(4\ 5\ 9\ 6)\big)^2 * (1\ 3\ 4\ 5)(6\ 9)(7\ 8) =$

$= (1\ 2\ 3\ 4\ 6)(5\ 9)(7)(8)$.

4 $\alpha * \beta * \alpha = (1\ 7\ 2\ 8)(4\ 5\ 9\ 6) * (1\ 3\ 4\ 5)(6\ 9)(7\ 8) *$

$(1\ 7\ 2\ 8)(4\ 5\ 9\ 6) =$

$= (1)(2)(3\ 5\ 4\ 7\ 8)(6\ 9)$.

**c)** Določi ciklično strukturo permutacije $\alpha$. Poišči eno rešitev $\pi$ enačbe $\pi^2 = \alpha$.

3 $\alpha$ ima ciklično strukturo $[4,4,1]$.

3 Torej ima $\pi^2$ c.s. $[4,4,1]$, dopustna c.s. za $\pi$ je $[8,1]$.

3 Ena možna rešitev je $\pi = (1\ 4\ 7\ 5\ 2\ 9\ 8\ 6)(3)$.

iz 1. cikla $\alpha$

iz 2. cikla $\alpha$