

Ime in priimek \_\_\_\_\_

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

## Diskretne strukture: drugi kolokvij

5. januar 2023

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Uporaba kalkulatorja ali drugih pripomočkov ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji!

### 1. naloga (25 točk)

Naj bo  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Preslikavi  $f, g: A \rightarrow A$  sta dani s tabelama

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ in } g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (5 točk) Ali je  $f$  injektivna? Ali je  $g$  surjektivna?

$f$  ni injektivna, saj  $f(4) = f(6) (=1)$ , vendar  $4 \neq 6$ .

$g$  ni surjektivna, saj  $7 \notin Z_g$ .

b) (5 točk) S tabelo zapiši  $g \circ f$ .

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) (5 točk) Poišči  $h: A \rightarrow A$ , da bo  $f \circ h = g$ .

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

↑            ↑  
4 ali 6    4 ali 6

d) (10 točk) Ali obstaja injektivna  $h: A \rightarrow A$ , da je  $f \circ h = g$ ? Če obstaja, jo poišči!

Obstaja, npr.  $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$

## 2. naloga (25 točk)

a) (10 točk) Z uporabo razširjenega Evklidovega algoritma poišči največji skupni delitelj števil 24 in 66.

$$66 = 66 \cdot 1 + 24 \cdot 0$$

$$24 = 66 \cdot 0 + 24 \cdot 1$$

$$18 = 66 \cdot 1 + 24 \cdot (-2)$$

$$(*) \quad 6 = 66 \cdot (-1) + 24 \cdot 3$$

$$(**) \quad 0 = 66 \cdot 4 + 24 \cdot (-11)$$

$$\gcd(66, 24) = 6$$

$$66 : 24 = 2 \text{ ost. } 18$$

$$24 : 18 = 1 \text{ ost. } 6$$

$$18 : 6 = 3 \text{ ost. } 0$$

b) (10 točk) Poišči splošno rešitev linearne diofantske enačbe  $24x + 66y = 522$ .

$$6 \mid 522, \text{ torej je ta LDE rešljiva. } (522 = 87 \cdot 6.)$$

$$\rightarrow \text{ iz } 87 \cdot (*) \text{ dobimo: } 24 \cdot 261 + 66 \cdot (-87) = 522.$$

$$\rightarrow \text{ iz } k \cdot (**) \text{ dobimo: } 24 \cdot (-11k) + 66 \cdot 4k = 0.$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline 24 \cdot (261 - 11k) + 66 \cdot (4k - 87) = 522 \end{array}$$

$$\text{Splošna rešitev je } (x_k, y_k) = (261 - 11k, 4k - 87), k \in \mathbb{Z}.$$

c) (5 točk) Ali ima enačba  $24x + 66y = 522$  rešitve  $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ? Poišči jih!

Želimo  $x_k \geq 0$  in  $y_k \geq 0$ , torej:

$$\bullet \quad 261 - 11k \geq 0 \dots k \leq \frac{261}{11} \dots k \leq 23,$$

$$\bullet \quad 4k - 87 \geq 0 \dots k \geq \frac{87}{4} \dots k \geq 22.$$

$$(x_{22}, y_{22}) = (19, 1) \text{ in } (x_{23}, y_{23}) = (8, 5) \text{ sta rešitvi v } \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

### 3. naloga (25 točk)

Na množici  $\mathbb{Z}$  je definirana relacija  $R$  s predpisom:

$$aRb \text{ natanko tedaj, ko } 6 \mid (3a+3b).$$

a) (10 točk) Pokaži, da je  $R$  ekvivalenčna relacija.

- refleksivnost ✓:  $aRa \dots 6 \mid (3a+3a) \dots 6 \mid (6a)$  kar je jasno res.
- simetričnost ✓:  $aRb \dots 6 \mid (3a+3b)$ , kar pomeni  $6 \mid (3b+3a) \dots bRa$
- tranzitivnost ✓:  $aRb \wedge bRc \dots 6 \mid (3a+3b)$  in  $6 \mid (3b+3c)$ ,  
torej  $6 \mid (3a+3b+3b+3c)$ , zato  $6 \mid (3a+3c) \dots aRc$ .  
$$\underbrace{3a+3b+3b+3c}_{3a+3c+6b}$$
  
to je jasno deljivo s 6

b) (10 točk) Opisi ekvivalenčne razrede relacije  $R$  in kvocientno množico  $\mathbb{Z}/R$ .

$$[0]_R = \{a \in \mathbb{Z} : aR0\} = \{a \in \mathbb{Z} : 6 \mid (3a)\} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$$

↑  
torej je  $a$  sodo št.

$$[1]_R = \{a \in \mathbb{Z} : aR1\} = \{a \in \mathbb{Z} : 6 \mid (3a+3)\} = \{2k+1 : k \in \mathbb{Z}\}$$

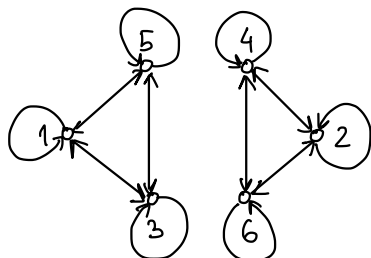
↑  
 $2 \mid (a+1)$ , tj.  $a+1$  je sodo oz.  $a$  je liho

Ker je  $[0]_R \cup [1]_R = \mathbb{Z}$ , imamo vse ekvivalenčne razrede.

$$\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R\}$$

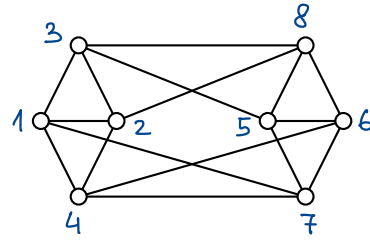
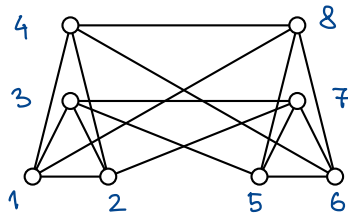
soda št. ↗ ↖ liha št.

c) (5 točk) Denimo, da relacijo  $R$  definiramo na množici  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Pregledno nariši njen graf.



#### 4. naloga (25 točk)

Podana sta spodnja grafa.



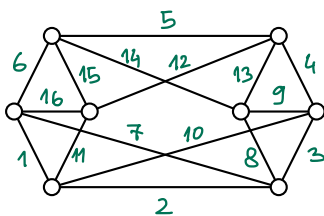
a) (7 točk) Ali sta izomorfna? Če sta, poišči izomorfizem med njima. Če nista, pa to dobro utemelji.

Sta izomorfna, izomorfizem je dan s številčenjem zgoraj.

b) (6 točk) Ali je kateri od teh grafov dvodelen? Utemelji.

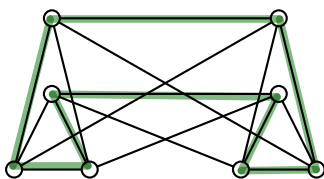
Nista dvodelna, saj vsebujeta cikle dolžine 3.

c) (6 točk) Ali je spodnji graf Eulerjev? Če je, označi Eulerjev obhod. Če ni, pa to dobro utemelji.



Je Eulerjev, saj so vse točke stopnje 4 (torej sode stopnje).  
Označen je en (možen) Eulerjev obhod.

d) (6 točk) Ali je spodnji graf Hamiltonov? Če je, nariši kakšen Hamiltonov cikel. Če ni, pa to pokaži z izrekom o razpadu grafa.



Je Hamiltonov. Hamiltonov cikel je označen.