Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

Prvi rok iz DS - teoretični del A, 19.01.2022

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Pri tem je vsako podvprašanje vsake naloge vredno 10 točk.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

1. **[30 točk]**

(a) Naj bosta A, B izjavna izraza. Pravilo sklepanja Modus ponens s simboli zapišemo kot

$$A \Rightarrow B,\ A \models B.$$

Z besedami na kratko razložite pomen tega zapisa.
(Opomba: Iz $A \Rightarrow B$ in A sledi B ni zadostna utemeljitev.)

Rešitev. Pri vseh naborih vrednosti A, B, za katere sta izraza $A \Rightarrow B$ in A resnična, je resničen tudi izraz B.

- V kolikor ste napisali resničnostno tabelo za $A \Rightarrow B$ in označili pomembne vrstice, niste pa razložili pomena oz. ste narobe razložili pomen, ste dobili 5 točk.
- Za pravilne utemeljitve, pri katerih se je videlo, da predpostavljate resničnost predpostavk $A \Rightarrow B$ in A, dokazujete pa resničnost zaključka B, ste prav tako dobili vse točke.
- Če ste predpostavili, da je B resničen, potem pa utemeljevali nekaj o predpostavkah, točk niste dobili.
- Za delno pravilne postopke zgornjih alinej ste lahko dobili tudi vmesne točke, odvisno od tega, kako veliko napako ste naredili.

(b) Predpis za negacijo $\neg$ lahko podamo s preslikavo $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$, $f(p) = 1 - p$. Kateri dvomestni izjavni veznik predstavlja preslikava $g : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, $g(p,q) = pq$?

Rešitev. Ker je $g(1,1) = 1$ in $g(1,0) = g(0,1) = g(0,0) = 0$, g predstavlja $\wedge$.

- Za napisan pravilen veznik brez vsakršne utemeljitve, ste dobili 3 točke.
- Za pravilno izračunano resničnostno tabelo, nato pa prepoznan napačen veznik, ste dobili 6 točk.

(c) Naj bosta f, g kot v (1b). Kateri dvomestni izjavni izraz, zapisan z veznikoma $\neg, \vee$, predstavlja preslikava $f \circ g$?

Rešitev.
1. možnost: Ker je $(f \circ g)(1,1) = f(g(1,1)) = f(1) = 0$ in podobno $(f \circ g)(0,0) = (f \circ g)(1,0) = (f \circ g)(0,1) = 1$, g predstavlja $\neg p \vee \neg q$.

2. možnost: $(f \circ g)(p,q) = f(g(p,q)) = f(p \wedge q) = \neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.

- Za napisan pravilen veznik brez vsakršne utemeljitve, ste dobili 3 točke.
- Za pravilno izračunano resničnostno tabelo, nato pa prepoznan napačen veznik, ste dobili 6 točk.

- Če ste navedli kot veznik $\uparrow$, ste dobili vse točke.

---

2. **[30 točk]**

(a) Ena izmed lastnosti kartezičnega produkta množic A, B, C, D je

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D).$$

Ali lahko od tod sklepamo tudi $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times D) \cap (B \times C)$?
Če je odgovor da, to utemeljite, sicer pa poiščite protiprimer.

Rešitev. Da, saj lahko v $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ zamenjamo vlogi množic C in D.

- Za preverbo enakosti na primeru ste dobili 1 točko.
- Za pravilen dokaz enakosti na ravni elementov, tj. če ste dokazovali obe vsebovanosti, ste dobili vse točke.

(b) Napišite primer množice A, katere potenčna množica ima 64 elementov.

Rešitev. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. V tem primeru ima $\mathcal{P}(A)$ natanko $2^6 = 64$ elementov.

- Zadoščala je navedba katere koli množice z ustreznim številom elementov. Utemeljitev pravilnosti ni bila potrebna.

(c) Naj bo M množica refleksivnih relacij na vaši množici A iz (2b). Koliko je $|M|$?

Rešitev. Refleksivna relacija R vsebuje vse pare $(1, 1), \ldots, (6, 6)$. Vsi ostali urejeni pari (i, j), $i \neq j$, $i, j \in A$, pa so lahko vsebovani v R ali pa ne. Takih parov je $6 \cdot 5 = 30$. Torej je refleksivnih relacij $2^{30} = |M|$.

- Za navedbo vsebovanosti vseh parov (i, i) v R, ste dobili 1 točko.
- Za pravilno preštetje elementov oblike (i, j) ste dobili še 1 točko.

---

3. **[40 točk]**

(a) Naj bodo a, b, c pozitivna cela števila. Če a deli $b \cdot c$ in sta si a, b tuja, koliko je navečji skupni delitelj števil a in c? Odgovor utemeljite.

Rešitev. Ker je $a|b \cdot c$ in $D(a, b) = 1$, sledi $a|c$. Torej je $D(a, c) = a$.

- Za utemeljitev $D(a, c) = a$ pri napačnem sklepu $b = 1$ ste dobili 1 točko.

(b) Naj bosta a, b pozitivni celi števili, ki sta si tuji. Ali obstajata pozitivni celi števili k, ℓ, da velja $ka + \ell b = 1$?

Rešitev. Ne. Ker so a, b, k, ℓ pozitivna cela števila, je $ka + \ell b \geq 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 > 1$.

- Za sklic na rešljivost linearnih diofantskih enačb pri pogoju $D(a, b) = 1$ niste dobili točk. Diofantska enačba iz naloge je res rešljiva, vendar pa k in ℓ nista obe pozitivni celi števili.

(c) Napišite permutacijo α množice $\{1, 2, \dots, 9\}$ s ciklično strukturo $[4, 4, 1]$.

Rešitev. $\alpha = (1234)(5678)(9)$.

- Ustrezala je vsaka rešitev, ki je imela pravo ciklično strukturo. Vmesnih točk pri tej nalogi ni bilo.

(d) Rešite enačbo $\pi^2 = \alpha$, kjer je α vaša rešitev točke (3c).

Rešitev. Ciklična struktura π je $[8, 1]$. Torej je $\pi = (15263748)(9)$.

- Za vaš primer α je potrebno π ustrezno prilagoditi. Vmesnih točk pri tej nalogi ni bilo.

Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

Prvi rok iz DS - teoretični del B, **19.01.2022**

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Pri tem je vsako podvprašanje vsake naloge vredno 10 točk.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

1. **[30 točk]**

(a) Naj bosta A, B izjavna izraza. Pravilo sklepanja Modus tollens s simboli zapišemo kot

$$A \Rightarrow B,\ \neg B\ \models\ \neg A.$$

Z besedami na kratko razložite pomen tega zapisa.
(Opomba: Iz $A \Rightarrow B$ in $\neg B$ sledi $\neg A$ ni zadostna utemeljitev.)

Rešitev. Pri vseh naborih vrednosti A, B, za katere sta izraza $A \Rightarrow B$ in $\neg B$ resnična, je resničen tudi izraz $\neg A$.

- V kolikor ste napisali resničnostno tabelo za $A \Rightarrow B$, $\neg B$, $\neg A$ in označili pomembne vrstice, niste pa razložili pomena oz. ste narobe razložili pomen, ste dobili 5 točk.
- Za pravilne utemeljitve, pri katerih se je videlo, da predpostavljate resničnost predpostavk $A \Rightarrow B$ in $\neg B$, dokazujete pa resničnost zaključka $\neg A$, ste prav tako dobili vse točke.
- Če ste predpostavili, da je $\neg A$ resničen, potem pa utemeljevali nekaj o predpostavkah, točk niste dobili.
- Za delno pravilne postopke zgornjih alinej ste lahko dobili tudi vmesne točke, odvisno od tega, kako veliko napako ste naredili.

(b) Predpis za negacijo $\neg$ lahko podamo s preslikavo $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$, $f(p) = 1 - p$. Kateri dvomestni izjavni veznik predstavlja preslikava $g : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, $g(p,q) = |p-q|$?

Rešitev. Ker je $g(1,1) = g(0,0) = 0$ in $g(1,0) = g(0,1) = 1$, g predstavlja $\veebar$.

- Za napisan pravilen veznik brez vsakršne utemeljitve, ste dobili 3 točke.
- Za pravilno izračunano resničnostno tabelo, nato pa prepoznan napačen veznik, ste dobili 6 točk.

(c) Naj bosta f, g kot v (1b). Kateri dvomestni izjavni veznik predstavlja preslikava $f \circ g$?

Rešitev.
1. možnost: Ker je $(f \circ g)(1,1) = f(g(1,1)) = f(0) = 1$ in podobno $(f \circ g)(0,0) = 1$, $(f \circ g)(1,0) = (f \circ g)(0,1) = 0$, g predstavlja $\Leftrightarrow$.

2. možnost: $(f \circ g)(p,q) = f(g(p,q)) = f(p \veebar q) = \neg(p \veebar q) = p \Leftrightarrow q$.

- Za napisan pravilen veznik brez vsakršne utemeljitve, ste dobili 3 točke.

- Za pravilno izračunano resničnostno tabelo, nato pa prepoznan napačen veznik, ste dobili 6 točk.

---

2. **[30 točk]**

(a) Ena izmed lastnosti kartezičnega produkta množic A, B, C, D je

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D).$$

Ali lahko od tod sklepamo tudi $(A \cap B) \times (C \cap D) = (B \times C) \cap (A \times D)$?
Če je odgovor da, to utemeljite, sicer pa poiščite protiprimer.

Rešitev. Da, saj lahko v $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ zamenjamo vlogi množic A in B.

- Za preverbo enakosti na primeru ste dobili 1 točko.
- Za pravilen dokaz enakosti na ravni elementov, tj. če ste dokazovali obe vsebovanosti, ste dobili vse točke.

(b) Napišite primer množice A, katere potenčna množica ima 32 elementov.

Rešitev. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. V tem primeru ima $\mathcal{P}(A)$ natanko $2^5 = 32$ elementov.

- Zadoščala je navedba katere koli množice z ustreznim številom elementov. Utemeljitev pravilnosti ni bila potrebna.

(c) Naj bo M množica simetričnih relacij na vaši množici A iz (2b). Koliko je $|M|$?

Rešitev. Vsak par $(1, 1), \ldots, (5, 5)$ je lahko vsebovan v simetrični relaciji R ali pa ne. Za vsak urejen par (i, j), $i \neq j$, $i, j \in A$, ki je v R, pa mora biti v R tudi (j, i). Takih dvojic $(i, j), (j, i)$ je $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Vsaka je vsebovana v R ali pa ni. Torej je simetričnih relacij $2^{5+10} = 2^{15} = |M|$.

- Za navedbo hkratne vsebovanosti vseh dvojic (i, j) in (j, i) v R ste dobili 1 točko.
- Za pravilno preštetje elementov oblike (i, j) ste dobili še 1 točko.

---

3. **[40 točk]**

(a) Naj bodo b, c, d pozitivna cela števila. Če b deli $c \cdot d$ in sta si b, d tuja, koliko je navečji skupni delitelj števil b in c? Odgovor utemeljite.

Rešitev. Ker je $b | c \cdot d$ in $D(b, d) = 1$, sledi $b | c$. Torej je $D(b, c) = b$.

- Za utemeljitev $D(b, c) = b$ pri napačnem sklepu $d = 1$ ste dobili 1 točko.

(b) Naj bosta a, b pozitivni celi števili, ki sta si tuji. Ali obstajata negativni celi števili k, ℓ, da velja $ka + \ell b = -1$?

Rešitev. Ne. Ker sta a, b pozitivni celi števili, k, ℓ pa negativni celi števila, je $ka + \ell b \leq (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = -2 < -1$.

- Za sklic na rešljivost linearnih diofantskih enačb pri pogoju $D(a, b) = 1$ niste dobili točk. Diofantska enačba iz naloge je res rešljiva, vendar pa k in ℓ nista obe negativni celi števili.

(c) Napišite permutacijo α množice $\{1, 2, \ldots, 7\}$ s ciklično strukturo $[3, 3, 1]$.

Rešitev. $\alpha = (123)(456)(7)$.

- Ustrezala je vsaka rešitev, ki je imela pravo ciklično strukturo. Vmesnih točk pri tej nalogi ni bilo.

(d) Rešite enačbo $\pi^2 = \alpha$, kjer je α vaša rešitev točke (3c), π pa nima ciklične strukuture $[3, 3, 1]$.

Rešitev. Ciklična struktura π je $[6, 1]$. Torej je $\pi = (142536)(7)$.

- Za vaš primer α je potrebno π ustrezno prilagoditi. Vmesnih točk pri tej nalogi ni bilo.