· Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: ____________________

3. izpit iz DS, 04.09.2020

- Čas pisanja: **35 minut**
- Če vam zmanjka prostora za reševanje na poli, to označite in nadaljujte na dodatnem listu.
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk. V oglatih oklepajih [·] je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanje, uporaba zapiskov, elektronskih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. [**20**] **Izjavni račun**

(a) [**10**] Konjunktivna normalna oblika izjavnega izraza $I(p,q,r)$ je naslednja:

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r).$$

Izpolnite manjkajoč stolpec v resničnostni tabeli izraza $I(p,q,r)$:

p	q	r	$I(p,q,r)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

.

Vsaka pravilna vrstica šteje 1.25 točke, vsaka napačna pa -1.25 točke. Tako 4 pravilno in 4 napačno izpolnjene vrstice prinesejo 0 točk.

(b) [**10**] Napišite pravilo sklepanja modus tollens in dokažite, da velja.

modus tollens: $A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$

Dokaz: Iz resničnostne tabele

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

opazimo, da imata obe predpostavki $A \Rightarrow B$ in $\neg B$ hkrati vrednost 1 samo za $A = B = 0$. Takrat pa ima tudi zaključek $\neg A$ vrednost 1.

Pravilno napisan sklep je štel 5 točk, pravilen dokaz pa še 5 točk.

2. [**20**] **Predikatni račun**

(a) [**10**] Prepišite naslednjo izjavno formulo in dodajte oklepaje tako, da nakažete po kakšen vrstnem redu se računa njeno vrednost:

$$\forall x \exists y : P(x,y) \vee R(y) \wedge \neg Q(z) \vee \exists y \forall w : (T(w) \vee Z(x,y,w))$$

$$((\forall x \exists y : P(x,y)) \vee (R(y) \wedge (\neg Q(z)))) \vee (\exists y \forall w : (T(w) \vee Z(x,y,w)))$$

Vsak od pravilno postavljenih parov $(\cdot)$ oklepajev je štel 2 točki.

(b) [**10**] Naj bo dano področje pogovora

$\mathcal{D}$: predmeti v prvem letniku visokošolskega študija računalništva in informatike na FRI in predikata

$$P(x): x \text{ se izvaja v zimskem semestru,}$$
$$Q(x,y): x \text{ in } y \text{ se izvajata v istem semestru.}$$

Napišite izjavno formulo W v preneksni obliki, ki zadošča naslednjim pogojem:

- Vsebuje spremenljivki x in y, ki sta vezani.
- Vsebuje konstanto z.
- Vsebuje predikata $P(x)$ in $Q(x,y)$.
- Ni resnična, če za konstanto z izberemo predmet *Diskretne strukture*.
- Je resnična, če za konstanto z izberemo predmet *Osnove verjetnosti in statistike*.

Primer izjavne formule W:

$$\exists x \exists y : (P(x) \wedge Q(x,y) \wedge \neg P(z))$$

V primeru, da ste napisali neko formulo W v preneksni obliki, ste za vsak izpolnjen pogoj dobili 2 točki.

3. [**20**] **Relacije**

(a) [**6**] Kaj je dvomestna relacija R v množici A?

Dvomestna relacija R v A je množica urejenih parov elementov iz $A \times A$.

Če ste napisali samo $R \subseteq A \times A$ brez besedne razlage, ste dobili 3 točke.

(b) [**7**] Naj bosta R in S dvomestni relaciji v množici A. Kaj je produkt relacij $R * S$?

Za pravilen odgovor je štel katerikoli od naslednjih:

- $R * S$ je relacija v množici A, katere elementi so urejeni pari $(x,y) \in A \times A$, za katere obstaja nek $z \in A$, tako da velja xRz in zSy.
- $R * S = \{(x,y) \in A \times A \colon \text{za nek } z \in A \text{ velja } xRz \text{ in } zSy\}$.

V primeru, da ste napisali:

- $\exists z \in A \colon xRz \wedge zSy$, ste dobili 3 točke.
- x in y sta v relaciji natanko tedaj, ko $\exists z \in A \colon xRz \wedge zSy$, ste dobili 4 točke.

(c) [**7**] Naj bo $A = \{x,y,z,u,v\}$ in $R = \{(x,y),(y,z),(z,u),(u,v)\}$. Določite tranzitivno ovojnico relacije R.

$$R^+ = \{(x,y),(y,z),(z,u),(u,v),(x,z),(x,u),(x,v),(y,u),(y,v),(z,v)\}$$

Za vsak manjkajoč par ste izgubili po 1 točko.

4. **[20] Teorija grafov**

   Za vsako od naslednjih trditev napišite, ali drži ali ne in odgovor pojasnite. Brez pojasnila tudi pravilen odgovor ne velja.

(a) **[6]** Poln graf na 5 točkah ima 20 povezav.

Ne drži, saj ima poln graf na 5 točkah $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ povezav.

Tudi skica grafa in štetje povezav je štelo za vse točke.

(b) **[7]** Če Eulerjevemu grafu dodamo eno povezavo, potem novi graf ni Eulerjev.

Drži, saj je povezan graf Eulerjev natanko tedaj, ko so vse točke sodih stopenj. Ko eno povezavo dodamo, dobimo dve točki, ki imata lihi stopnji.

Utemeljitev, da ima nov graf liho mnogo povezav, ni pravilna. Kot tudi ne utemeljitev, da je očitno, da Eulerjevega obhoda ne moremo narediti. Če ste napisali samo, da je Eulerjev natanko tedaj, ko so vse točke sodih stopenj, ste dobili 3 točke.

(c) **[7]** Komplement dvodelnega grafa s 5 točkami ni nikoli dvodelen.

Drži, saj ima vsaj ena množica razbitja grafa vsaj 3 vozlišča. V komplementu grafa so vse vozlišča iste množice razbitja povezana, torej dobimo cikel dolžine 3.

Utemeljitev, da kromatično število ne bo 2 ne zadošča.

5. **[20] Linearne diofantske enačbe in permutacije**

(a) Dana je enačba $ax + by = c$, kjer sta x, y celoštevilski spremenljivki, a, b, c pa celoštevilski parametri.

   i. **[6]** Napišite potreben in zadosten pogoj na parametre a, b, c, da bo imela enačba vsaj eno celoštevilsko rešitev (x_0, y_0).

   Največji skupni delitelj parametrov a in b mora deliti c.

   Tudi $gcd(a, b)|c$ je štelo za vse točke.

   ii. **[7]** V primeru $a = 35$, $c = 21$ ugotovite, ali obstaja parameter b, za katerega ima enačba vsaj eno celoštevilsko rešitev. Odgovor utemeljite.

   Ustrezn je vsak b, za katerega velja, da največji skupen delitelj števil 35 in b deli 21. Npr. $1, 7, 14, 21, \ldots$

(b) **[7]** Kaj je red permutacije in kako ga izračunamo iz razcepa na disjunktne cikle?

Red permutacije π je najmanjše število $k \in \mathbb{N}$, za katerega je potenca π^k identična permutacija.

Red permutacije π je enak najmanjšemu skupnemu večkratniku dolžin disjunktnih ciklov v razcepu π.

Če ste napisali enega od odgovorov, ste dobili 4 točke. Če ste napisali namesto potence π^k oznako π_k, ste izgubili 1 točko.