· Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

2. izpit iz DS, 06.02.2020

- Čas pisanja: **45 minut**
- Če vam zmanjka prostora za reševanje na poli, to označite in nadaljujte na dodatnem listu.
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk, pri čemer morate pri vsaki nalogi zbrati vsaj 30% točk, tj. 1.5 točke od 5 možnih. V oglatih oklepajih [·] je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanje, uporaba zapiskov, elektronskih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. **[5 točk] Matematična indukcija in izjavni račun**

(a) [**1**] Naj bo $T(n)$ trditev o naravnem številu $n \in \mathbb{N}$. Vemo, da velja $T(3)$ in da iz resničnosti $T(n)$ sledi resničnost $T(n+4)$. Ali lahko sklepamo, da velja $T(2020)$? Odgovor dobro utemeljite.

Iz resničnosti $T(3)$ in predpostavke, da iz resničnosti $T(n)$ velja resničnost $T(n+4)$, lahko sklepamo, da so resnične vse trditve $T(3+4k)$, kjer je $k \in \mathbb{N}$. Zanima nas torej, ali je število 2020 oblike $3+4k$ za nek $k \in \mathbb{N}$. Toda $2020 = 4 \cdot 505$. Torej o resničnosti $T(2020)$ iz predpostavk ne moremo nič sklepati.

(b) [**1**] Kdaj pravimo, da sta dva izjavna izraza enakovredna?

Izjavna izraza sta enakovredna, kadar imata za vsak nabor vrednosti izjavnih spremenljivk enaki logični vrednosti.

(c) [**1**] Napišite disjunktivno normalno obliko izraza $I(p,q)$, ki ima naslednjo resničnostno tabelo:

p	q	$I(p,q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

.

$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$.

(d) [**2**] Napišite pravilo sklepanja modus ponens in dokažite, da velja.

Modus ponens: $A \Rightarrow B, A \models B$.

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Predpostavki $A \Rightarrow B$ in A sta resnični samo v prvi vrstici zgornje tabele, kjer je resničen tudi zaključek B. Torej je sklep pravilen.

2. [**5 točk**] **Predikatni račun in množice**

(a) [**1**] Navedite de Morganov zakon iz teorije množic.

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ in $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(b) [**1**] Definirajte potenčno množico $\mathcal{P}A$ množice A.

$\mathcal{P}A = \{X : X \subseteq A\}$.

(c) [**3**] Za vsako od naslednjih množic ugotovite, ali je potenčna množica neke množice. Če je odgovor da, navedite to množico, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

i. $\{\emptyset, 1, 2, \{1, 2\}\}$.

Ni potenčna množica, saj elementa 1, 2 nista množici.

ii. $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Ni potenčna množica, saj ne vsebuje $\emptyset$.

iii. $\{\emptyset, \{1\}, \{\{2, 7\}\}, \{1, \{2, 7\}\}\}$.

Je potenčna možica množice $\{1, \{2, 7\}\}$.

3. [**5 točk**] **Relacije in preslikave**

(a) [**1**] Kdaj je relacija $f \subseteq A \times A$ preslikava na množici A?

Relacija f je preslikava, če je enolična, je njena domena $\mathcal{D}_f$ cela množica A in je njena slika $\mathcal{Z}_f$ podmnožica A.

(b) [**2**] Poiščite množico A in preslikavo $f : A \to A$, ki je injektivna, a ni surjektivna.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$.

(c) [**2**] Napišite in dokažite natančen pogoj za injektivnost kompozituma $f \circ f$, kjer je $f : A \to A$ preslikava.

Kompozitum $f \circ f$ je injektiven natanko tedaj, ko je preslikava f injektivna.

Dokaz v smer ($\Rightarrow$). Če f ne bi bila injektivna, bi obstajala x in y z $x \neq y$, za katera bi bilo $f(x) = f(y)$ in zato $f(f(x)) = f(f(y))$. Toda to je v nasprotju z injektivnostjo $f \circ f$.

Dokaz v smer ($\Leftarrow$). Dokazati moramo, da iz $(f \circ f)(x) = (f \circ f)(y)$ sledi $x = y$. Po definiciji kompozituma velja $f(f(x)) = f(f(y))$. Ker je f injektivna, sledi od tod $f(x) = f(y)$. Ker je f injektivna, je $x = y$.

4. [**5 točk**] **Teorija grafov**

(a) [**2**] Naj bo K_9 poln graf na 9 točkah, $H = (V, E)$ pa njemu izomorfen graf. Izpolnite:

(i) $|V| =$ (ii) $|E| =$ (iii) $\chi(H) =$ (iv) $H^c =$

$|V| = 9$, $|E| = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$, $\chi(H) = 9$, $H^c = \emptyset$.

(b) [**1**] Naj bo $G = (V, E)$ graf, kjer je V množica vozlišč, E pa množica povezav. Kaj pomeni, da je množica $S \subseteq V$ prerezna za graf G?

Množica $S \subseteq V$ je prerezna, če po odstranitvi vseh vozlišč in povezav, ki imajo vsaj eno krajišče v S, graf razpade na več povezanih komponent, kot jih je imel prvotni graf.

(c) [**2**] Naj bo G Hamiltonov graf in S prerezna množica moči k. Največ koliko komponent za povezanost ima $G - S$? Odgovor utemeljite.

Graf $G - S$ ima največ k komponent za povezanost. Če bi jih imel več, bi moral Hamiltonov cikel vsaj $(k+1)$-krat zamenjati komponento, pri čemer bi moral iti na vsakem koraku prek vozlišča v S. Ker je teh le k, to ne bi šlo.

5. [**5 točk**] **Razširjen Evklidov algoritem in linearne diofantske enačbe**

(a) [**2**] Dana je enačba $84x + 63y = c$, kjer sta x, y celoštevilski spremenljivki, c pa celoštevilski parameter. Za katere parametre c ima enačba vsaj eno celoštevilsko rešitev?

$$\begin{aligned}
(1):& \quad 84 = 1 \cdot 84 + 0 \cdot 63, & & \\
(2):& \quad 63 = 0 \cdot 84 + 1 \cdot 63, & & 84 = 1 \cdot 63 + 21, \\
(3) = (1) - (2):& \quad 21 = 1 \cdot 84 - 1 \cdot 63, & & 63 = 3 \cdot 21 + 0, \\
(4) = (2) - 3(3):& \quad 0 = -3 \cdot 84 + 4 \cdot 63. & &
\end{aligned}$$

Torej je $D(84, 63) = 21$. Zato mora biti c celoštevilski večkratnik števila 21.

(b) [**3**] Za najmanjši pozitiven celoštevilski c, pri katerem ima zgornja enačba celoštevilsko rešitev, napišite formulo, ki opiše vse celoštevilske rešitve.

Najmanjši tak c je 21. Eno od rešitev (x_0, y_0) dobimo iz predzadnje vrstice razširjenega Evklidovega algoritma. Torej $(x_0, y_0) = (1, -1)$. Vse rešitve pa so oblike

$$\left(x_0 + k \cdot \frac{84}{21}, y_0 - k \cdot \frac{63}{21}\right) = (1 + 4k, -1 - 3k),$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

6. **[5 točk] Permutacije in linearne rekurzivne enačbe**

(a) [**1**] Navedite splošno obliko linearne rekurzivne enačbe.

$$c_d a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \ldots + c_0 a_n = f(n),$$

kjer so c_i dana števila in $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funkcija.

(b) [**4**] Rešite linearno rekurzivno enačbo $a_{n+2} - 3a_{n+1} - 4a_n = 0$ pri začetnih pogojih $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

Karakteristični polinom je

$$x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1).$$

Njegovi ničli sta $x = 4$ in $x = -1$. Splošna rešitev je torej oblike

$$a_n = \alpha 4^n + \beta(-1)^n.$$

Ker velja $a_0 = \alpha + \beta = 1$ in $a_1 = 4\alpha - \beta = 3$, sledi $\alpha = \frac{4}{5}$ in $\beta = \frac{1}{5}$.