1. kolokvij iz Diskretnih struktur — UNI — Rešitve
Ljubljana, 6. december 2004

1. Pokaži ali ovrzi naslednji sklep:

$$s \Rightarrow q \vee t\,,\ \neg u \Leftrightarrow \neg q \vee r\,,\ u \vee \neg p \vee s\,,\ t \vee \neg r \Rightarrow \neg s \quad \models\ p \Rightarrow q.$$

Rešitev.

1.	$s \Rightarrow q \vee t$	predpostavka
2.	$\neg u \Leftrightarrow \neg q \vee r$	predpostavka
3.	$u \vee \neg p \vee s$	predpostavka
4.	$t \vee \neg r \Rightarrow \neg s$	predpostavka
5.1	p	predpostavka PS
5.1.1.	$\neg q$	predpostavka RA
5.1.2	$\neg q \vee r$	Pr(5.1.1)
5.1.3	$(\neg u \Rightarrow \neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee r \Rightarrow \neg u)$	$\sim$2
5.1.4	$(\neg q \vee r \Rightarrow \neg u)$	Po(5.1.3)
5.1.5	$\neg u$	MP(5.1.2, 5.1.4)
5.1.6	s	DS(5.1.5, 5.1.3)
5.1.7	$q \vee t$	MP(5.1.6, 1)
5.1.8	$\neg(t \vee \neg r) \sim \neg t \wedge r$	MT(5.1.6, 4)
5.1.9	$\neg t$	Po(5.1.8)
5.1.10	q	DS(5.1.9, 5.1.7)
5.1.11.	$\neg q \wedge q \sim 0$	Zd(5.1.1, 5.1.10)
5.1	q	konec RA
5.	$p \Rightarrow q$	konec PS

Lahko pa že na začetku uporabimo PS in RA in sklep predelamo v ekvivalentno obliko:

$$v \Rightarrow q \vee t\,,\ \neg u \Leftrightarrow \neg q \vee r\,,\ u \vee \neg p \vee v\,,\ t \vee \neg r \Rightarrow \neg v\,,\ p\,,\ \neg q \quad \models\ 0.$$

Dokaz poteka enako, le da je oštevilčenje enonivojsko.

2. Naj bodo A, B in C dane množice in naj bo X neznana množica. Ugotovi, kdaj je spodnji sistem enačb rešljiv in ga reši.

$$\begin{aligned}(A+B)\setminus X &= C,\\ A\cap B\cap C &= X\setminus(A\cup B).\end{aligned}$$

Če sistema ne znate rešiti, poiščite vsaj čimveč zvez, ki veljajo ali morajo veljati med množicami A, B, C in X, če naj ima zgornji sistem rešitev. Lahko si *pomagate* tudi z Vennovimi diagrami.

Rešitev.
Iz enačbe $(A+B)\setminus X = C$ razberemo, da je: $C \subseteq A+B$ $^{(*)}$. Zato je $A\cap B\cap C = \emptyset$ $^{(**)}$. Če prvo enačbo presekamo z X dobimo $X\cap C = \emptyset$ $^{(***)}$. Po $^{(**)}$ in drugi enačbi sledi $X\setminus(A\cup B) = \emptyset$ in iz tega $X \subseteq A\cup B$ $^{(+)}$. Po prvi enačbi in posebej po $^{(**)}$ sledi, $(A+B)\setminus C \subseteq X$. Ker je $((A+B)\setminus C)\cup C = (A+B)$ in zaradi $^{(+)}$ velja, $(A+B)\setminus C\subseteq X$, zaradi $^{(***)}$ in $^{(+)}$ pa X lahko vsebuje tudi del $A\cap B$. Če povzamemo dobljene pogoje:

Sistem je rešljiv le pri pogoju, da sta množici A in B splošni množici in $C\subseteq A+B$. Rešitev je tedaj lahko kvečjemu oblike $X = ((A+B)\setminus C)\cup(T\cap A\cap B)$, kjer je T poljubna množica.

Če je pogoj za rešljivost izpolnjen, zlahka vidimo, da zgoraj omenjena rešitev izpolni obe enačbi.

3. Pokaži, da sta predikatni formuli :

$$\neg\exists x\,((\neg R(x) \Rightarrow P(x)) \wedge (Q(x) \Rightarrow R(x)))$$

in

$$\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg\exists y\,R(y)$$

enakovredni.

Rešitev.

$$\begin{aligned}
\neg\exists x\,((\neg R(x) \Rightarrow P(x)) \wedge (Q(x) \Rightarrow R(x))) \sim \\
&\sim \neg\exists x\,((R(x) \vee P(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee R(x))) \sim \\
&\sim \forall x\,\neg((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee R(x)) \sim \\
&\sim \forall x\,(\neg(P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \neg R(x)) \sim \\
&\sim \forall x\,(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall x\,\neg R(x) \sim \\
&\sim \forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg\exists x\,R(x) \sim \\
&\sim \forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg\exists y\,R(y).
\end{aligned}$$

4. Koliko števil je na celoštevilskem intervalu [51..1500], ki so deljiva s 15, niso pa deljiva niti s 23 niti s 35.

Rešitev.
Naj A_n pomeni množico števil iz intervala [51..1500], ki so deljiva z n. Potem velja:

$$|A_n| = \left\lfloor \frac{1500}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{50}{n} \right\rfloor .$$

Izračunati moramo:

$$|A_{15} \setminus (A_{23} \cup A_{35})| = ?$$

Pa izračunajmo:

$$\begin{aligned}
|A_{15} \setminus (A_{23} \cup A_{35})| &= |A_{15}| - |A_{15} \cap (A_{23} \cup A_{35})| \\
&= |A_{15}| - |(A_{15} \cap A_{23}) \cup (A_{15} \cap A_{35})| \\
&= |A_{15}| - (|A_{15} \cap A_{23}| + |A_{15} \cap A_{35}| - |A_{15} \cap A_{23} \cap A_{35}|) \\
&= |A_{15}| - |A_{345}| - |A_{105}| + |A_{2415}| \\
&= 97 - 4 - 14 + 0 = 79.
\end{aligned}$$

1. kolokvij iz Diskretnih struktur — UNI
Ljubljana, 28. november 2005

1. (a) Pokaži, da velja pravilo sklepanja RE (resolucija):

$$A \vee B,\ \neg B \vee C \ \models\ A \vee C\,.$$

   (b) Samo z uporabo pravila RE, enakovrednosti izjavnih izrazov in morebitnega dodajanja tavtologij med predpostavke dokaži sklep

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r),\ p \Rightarrow \neg r,\ t \vee s \Rightarrow q \ \models\ t \Rightarrow \neg p\,.$$

   Če dokažete sklep z uporabo drugih pravil sklepanja, dobite zgolj polovico točk!

2. Dan je trimestni logični veznik

$$A(p,q,r) \ \sim\ p \vee \neg q \Leftrightarrow r\,.$$

   (a) Kateri od naslednjih naborov so polni:

$$\{A\}, \quad \{A,\neg\}, \quad \{A,0\}\,.$$

   (b) Naj bo $A_0 = \neg p$ in $A_n = A(p, \neg A_{n-1}, A_{n-1})$, $n \geq 1$. Izračunaj A_{20}.

3. Naj bodo A, B in C dane množice in naj bo X neznana množica. Ugotovi, kdaj je spodnji sistem enačb rešljiv in poišči vse njegove rešitve.

$$X \cup A = B \cap C\,,$$
$$X \cap B = A \cup B\,.$$

   Če sistema ne znate rešiti, poiščite vsaj čimveč zvez, ki veljajo ali morajo veljati med množicami A, B, C in X, če naj ima zgornji sistem rešitev. Lahko si *pomagate* tudi z Vennovimi diagrami.

4. Pokaži, da sta predikatni formuli

$$\forall x \forall y\,\big((P(y) \Rightarrow R(y,x)) \vee Q(x)\big)$$

   in

$$\forall x\,\big(\exists y\,(R(x,y) \downarrow Q(y)) \Rightarrow \neg P(x)\big)$$

   enakovredni.

   Ali je prva formula enakovredna formuli $\forall y \forall x\,\big((P(x) \Rightarrow R(x,y)) \vee Q(y)\big)$?

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega lista A4 z obrazci.

Odgovore dobro utemelji!

Rezultati bodo dostopni na `matematika.fri.uni-lj.si` *in na oglasni deski za matematiko na FRI. Obenem bo objavljen tudi termin, namenjen ogledu izdelkov in morebitnim pritožbam na rezultate.*

1. kolokvij iz Diskretnih struktur — UNI
Ljubljana, 24. november 2006

1. Ugotovi, ali je naslednji sklep pravilen ali napačen:

$$q \Rightarrow p, \quad (u \Rightarrow v) \Leftrightarrow p, \quad t \Rightarrow q \vee s, \quad (t \Rightarrow s) \Rightarrow v \vee q \quad \models \quad u \Rightarrow v$$

   Poišči protiprimer ali zapiši dokaz.

2. Dan je trimestni logični veznik

$$B(p,q,r) \ \sim \ p \vee (q \wedge \neg r)\,.$$

   (a) Katere izmed naslednjih izjav lahko izrazimo *samo* s pomočjo logičnega veznika B:

$$\neg p, \qquad p \vee q, \qquad p \uparrow q\,.$$

   (b) Kateri od naslednjih naborov so polni:

$$\{B\}, \qquad \{B, \neg\}, \qquad \{B, 0\}, \qquad \{B, 0, 1\}\,.$$

   (c) Naj bo

$$A_0(p) = \neg p \quad \text{in} \quad A_n(p) = B(\neg A_{n-1}(p), p, A_{n-1}(p)),\ n \geq 1.$$

   Izračunaj A_{2006}.

3. Določi izjavo I tako, da bo izjava

$$(A \Rightarrow (B \downarrow C)) \veebar (I \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C) \uparrow A)$$

   tavtologija. Dobljeno izjavo čimbolj poenostavi!

4. Pokaži, da sta predikatni formuli

$$\forall x\, \forall y\, \big(\exists z\, (P(x,z) \wedge P(z,y)) \Rightarrow P(x,y)\big)$$

   in

$$\forall y\, \forall x\, \big(P(x,y) \Rightarrow \forall z\, (P(y,z) \Rightarrow P(x,z))\big)$$

   enakovredni.

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega lista A4 z obrazci.

Odgovore dobro utemelji!

Rezultati bodo dostopni na `matematika.fri.uni-lj.si` *Obenem bo objavljen tudi termin namenjen ogledu izdelkov in morebitnim pritožbam na rezultate.*

1. kolokvij iz Diskretnih struktur
Ljubljana, 30. november 2007

1. Ugotovi, ali je naslednji sklep pravilen ali napačen:

$$\neg s \Rightarrow q, \quad s \vee \neg t, \quad \neg(s \vee r), \quad (q \wedge \neg p) \Rightarrow t \quad \models \quad p \wedge \neg r$$

   Zapiši dokaz ali poišči protiprimer.

2. Logični veznik A je definiran z $A(p,q,r) \sim p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$.

   (a) Pokaži, da lahko samo z uporabo logičnega veznika A zapišemo logično konstanto 1.

   (b) Kateri izmed naborov $\{A\}$, $\{A,1\}$, $\{A,0\}$ in $\{A,\neg\}$ so polni?

   (c) Zaporedje A_n je definirano rekurzivno z

$$\begin{aligned} A_0 &\sim 0, \\ A_1 &\sim \neg p, \\ A_n &\sim A(A_{n-2}, A_{n-1}, p) \quad \text{za } n \geq 2. \end{aligned}$$

   Izračunaj A_{2007}.

3. Pokaži, da sta predikatni formuli

$$\forall x \exists y\, (P(y) \Rightarrow (R(x,y) \Rightarrow Q(x)))$$

   in

$$\exists x\, (\forall y\, R(x,y) \wedge \neg Q(x)) \Rightarrow \exists z\, \neg P(z)$$

   enakovredni.

4. Naj bodo A, B, C dane množice. Kdaj je rešljiv sistem

$$\begin{aligned} X \cap A &= A \cap B \\ X \cup C &= B \setminus A \end{aligned}$$

   Če je sistem rešljiv, kakšna je njegova rešitev?

Odgovore dobro utemelji!

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega A4 lista z obrazci. Rezultati bodo dostopni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Rešitve 1. kolokvija iz Diskretnih struktur
Ljubljana, 28. november 2008

1. *Dan je tromestni logični veznik $A(p,q,r)$, ki vrne 1 natanko tedaj, ko sta natanko dva od argumentov enaka 1.*

   (a) Zapiši veznik v obliki izraza.

   (b) Pokaži, da nabori $\{A\}$, $\{A,0\}$, $\{A,\wedge\}$ niso polni.

   (c) Pokaži, da sta nabora $\{A,\Rightarrow\}$, $\{A,1\}$ polna.

   (d) Dano je zaporedje: $A_0 \sim p$, $A_1 \sim q$, $A_n \sim A(A_{n-1}, A_{n-2}, 1)$. Izračunaj A_{2008}.

   Rešitev:

   (a) Izraz za veznik enostavno sestavimo v disjunktivni normalni obliki:
   $$A(p,q,r) \sim (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r).$$

   (b) S pomočjo zgornje formule hitro preverimo, da je $A(p,p,p) \sim 0$, kar med drugim pomeni, da veznik A ohranja ničlo, zato $\{A\}$ ni poln nabor. Podobno oba veznika hkrati, A ter konjunkcija, ohranjata ničlo, zato katero koli konstrukcijsko drevo sestavljeno s pomočjo veznikov v naboru $\{A,\wedge\}$ in spremenljivke p ne more predstavljati negacije – ne moremo sestaviti formulo za negacijo. Podoben argument velja za nabor $\{A,0\}$.

   (c) $A(p,p,p) \sim 0$, zato lahko z naborom $\{A,\Rightarrow\}$ izrazimo nabor $\{0,\Rightarrow\}$, ki je poln. Opazimo še: $A(1,1,p) \sim \neg p$, ter $A(p,q,0) \sim A(p,q,A(p,p,p)) \sim p \wedge q$. Tako lahko z naborom $\{A,1\}$ izrazimo nabor $\{\neg,\wedge\}$, ki je poln nabor.

   (d) Opazimo: $A(p,q,1) \sim p \veebar q$. Računamo:
   $$\begin{aligned} &A_0 \sim p \\ &A_1 \sim q \\ &A_2 \sim q \veebar p \\ &A_3 \sim (q \veebar p) \veebar q \ \sim p \\ &A_4 \sim p \veebar (q \veebar p) \sim q \\ &A_5 \sim q \veebar p \\ &\dots \end{aligned}$$

   Opazimo:

   - $A_{3i} = p$, za $i \in \mathbb{N}$,
   - $A_{3i+1} = q$, za $i \in \mathbb{N}$,
   - $A_{3i+2} = q \veebar p$, za $i \in \mathbb{N}$.

   število 2008 ima pri deljenju s 3 ostanek 1, zato je $A_{2008} = q$.

2. *Ugotovi, ali je naslednji sklep pravilen ali napačen:*

$$r \vee s \Rightarrow r \wedge q, \quad r \vee s \vee t, \quad \neg p \wedge t \Rightarrow r \quad \models p \vee q \wedge r\,.$$

Zapiši dokaz ali poišči protiprimer.

Rešitev:

Sklep

$$r \vee s \Rightarrow r \wedge q, \quad r \vee s \vee t, \quad \neg p \wedge t \Rightarrow r \quad \models p \vee q \wedge r$$

je po RA ekvivalenten sklepu:

$$r \vee s \Rightarrow r \wedge q, \quad r \vee s \vee t, \quad \neg p \wedge t \Rightarrow r, \quad \neg(p \vee q \wedge r) \models 0\,.$$

Dokažimo, da je sklep pravilen:

1. $r \vee s \Rightarrow r \wedge q$	Predpostavka 1
2. $r \vee s \vee t$	Predpostavka 2
3. $\neg p \wedge t \Rightarrow r$	Predpostavka 3
4. $\neg(p \vee q \wedge r) \sim \neg p \wedge \neg(q \wedge r)$	Predpostavka 4
5. $\neg p$	Po(4)
6. $\neg(q \wedge r)$	Po(4)
7. $\neg(r \vee s) \sim \neg r \wedge \neg s$	MT(6, 1)
8. $r \vee s \vee t \sim (r \vee s) \vee t$	~ 2
9. t	DS(7, 8)
10. $\neg r$	Po(7)
11. $\neg p \wedge t$	Zd(5, 9)
12. r	MP(11, 3)
13. $r \wedge \neg r \sim 0$	Zd(12, 10)

3. *V področju pogovora celih števil definiraj ustrezne predikate in formaliziraj naslednje izjave:*

   (a) Vsako celo število lahko pišemo kot vsoto dveh celih števil.

   (b) Vsako celo število je vsota dveh različnih celih števil.

   (c) Vsaki celi števili imata enolično/natančno določeno vsoto.

   Pozabimo na področje pogovora. V predikatnem računu nam večkrat prav pride tudi ekskluzivni eksistenčni kvantifikator $\exists!$ — *izraz* $\exists! x P(x)$ *preberemo kot* "Obstaja natančno en x, za katerega velja $P(x)$."

   (d) Izrazi $\exists!$ *samo z uporabo običajnih kvantifikatorjev* $\exists$ *in* $\forall$ *tj. zapiši formulo, ki ne uporablja* $\exists!$ *in je enakovredna formuli* $\exists! x P(x)$.

   Lahko si pomagaš s točkami (a), (b), (c).

   Rešitev:

   Najprej bi lahko definirali ustrezne predikate,

$$E(x, y) \quad \text{pomeni: } x \text{ in } y \text{ sta enaka} \tag{1}$$
$$V(x, y, z) \quad \text{pomeni: vsota } x\text{-a in } y\text{-a je enaka } z \tag{2}$$

   toda veliko bolj naravno je namesto $E(x, y)$ pisati $x = y$ in namesto $V(x, y, z)$ pisati $x + y = z$. Če torej v spodnjem razmišljanju koga moti zapis z znaki kot so $+$ in $=$, naj zapise preoblikuje z uporabo predikatov E in V.

   (a) Izjavo

   Vsako celo število lahko pišemo kot vsoto dveh celih števil.

   lahko enakovredno preberemo kot

   Za vsako celo število x obstajata takšni celi števili u in v, da je x vsota u-ja in v-ja.

   in formaliziramo, upoštevaje, da je področje pogovora množica celih števil, v

$$\forall x \exists u \exists v (u + v = x)$$

   (b) Izjavo

   Vsako celo število lahko pišemo kot vsoto dveh različnih celih števil.

   lahko razumemo kot zgornjo, le da morata biti u in v različna:

$$\forall x \exists u \exists v (u + v = x \land u \neq v)$$

   (c) Izjavo

   Vsaki celi števili imata enolično/natančno določeno vsoto.

razumemo takole:

> *Vsaki celi števili u in v lahko seštejemo, tj. obstaja njuna vsota $x = u + v$, in ne obstaja drugo celo število (drugo . . . različno od x) ki bi bilo ravno tako enako vsoti števil u in v.*

Formalen zapis:

$$\forall u \forall v \exists x (x = u + v \land \neg \exists y (y \neq x \land y = u + v))$$

(d) Za zadnjo alinejo naloge lahko opazimo, da lahko kot lastnost celega števila interpretiramo možnost, da je takšno celo število vsota izbranih števil u in v. To pomeni, da lahko ekskluzivni eksistenčni kvantifikator opišemo takole:

$$\exists ! x P(x) \sim \exists x (P(x) \land \neg \exists y (y \neq x \land P(y)))$$

4. *Naj bodo A, B, C dane množice in naj bo X neznana množica. Ugotovi, kdaj je spodnji sistem enačb rešljiv in poišči vse njegove rešitve*

$$\begin{aligned}(A+B)\cap X &= A\cup C\\ X\cup B &= A\cap C.\end{aligned}$$

Rešitev:

Iz prve enačbe sledi $A \subseteq X$, $C \subseteq X$, iz druge pa $X \subseteq A$, $X \subseteq C$ in $B \subseteq A$. Skupaj je $X = A = C$. Ker je $B \subseteq A$, lahko poenostavimo $A+B = A\cap B^C$. Prva enačba se prepiše v $A \cap B^C = A$. Če zadnjo enakost presekamo z B, dobimo $\emptyset = A \cap B = B$.

Pogoji za rešitev so $A = C$ in $B = \emptyset$, rešitev pa je $X = A$. Zadostnost pogojev in rešitev je potrebno preveriti:

$$\begin{aligned}(A+B)\cap X &= (A+\emptyset)\cap A = A\\ A\cup C &= A\cup A = A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X\cup B &= A\cup\emptyset = A\\ A\cap C &= A\cap A = A\end{aligned}$$