1. kolokvij iz Diskretnih struktur
Ljubljana, 10. december 2009

1. Po tekmi se navijači Simon, Urban, Tomaž in Zoran v krčmi pri Veseli Ani dogovarjajo, kdo bo šel v Južno Afriko. Ko jim prinese pijačo, vesela Ana sliši naslednje ugotovitve:

   - Če bo šel v Južno Afriko Zoran ali Urban, potem bo šel tudi Simon, ampak Tomaž bo ostal doma.
   - Če gre Urban v Južno Afriko, potem gresta tudi Zoran in Tomaž.
   - Če gre v Južno Afriko Tomaž, bo doma ostal Simon ali pa Zoran.

   Vesela Ana pravi: "Urban, ti boš ostal doma." Ali je sklepala pravilno?

2. Logični veznik A definiramo z opisom:

   $A(p,q,r) \sim 1 \quad \Longleftrightarrow \quad p$ in q imata različno, q in r pa isto logično vrednost.

   (a) Kateri od naborov $\{A\}$, $\{A,0\}$, $\{A,\Rightarrow\}$ oz $\{A,1\}$ so polni?

   (b) Zaporedje izrazov $(B_n)_n$ definiramo z

   - $B_1 = 1$, $B_2 = p$,
   - $B_n = A(B_{n-2}, B_{n-1}, B_{n-1})$ za vse $n > 2$.

   Določi B_{2009}.

3. Naj bodo A, B, C dane množice in naj bo X neznana množica. Ugotovi, kdaj je spodnji sistem enačb rešljiv in poišči vse njegove rešitve.

$$\begin{aligned} A \cup X &= B \setminus X \\ X \cup C &= B \cap X \\ A \cap X &= C \setminus X \end{aligned}$$

4. Naj bo $\mathbb{P}$ množica praštevil. Relacija R na naravnih številih naj bo podana s predpisom

$$a \,\mathrm{R}\, b \iff \forall p \in \mathbb{P} : (p \,|\, a \iff p \,|\, b)\,.$$

   (a) Ali je $6\,\mathrm{R}\,24$? Kaj pa $8\,\mathrm{R}\,24$? Natančno utemelji.

   (b) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.

   (c) Določi ekvivalenčni razred števila 2. Opiši še ekvivalenčni razred števila 2010.

   (d) Ali obstaja ekvivalenčni razred z enim samim elementom?

Odgovore dobro utemelji!

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega A4 lista z obrazci. Rezultati bodo dostopni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

1. kolokvij iz Diskretnih struktur
Ljubljana, 10.12.2010

1. Naj bo $A(p,q,r) \sim (p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$ tromestni veznik.
   (a) Zapiši resničnostno tabelo za $A(p,q,r)$.
   (b) Poenostavi izraza $A(p,q,0)$ in $A(p,0,1)$.
   (c) Kateri izmed naborov $\{A\}$, $\{A,0\}$, $\{A,0,1\}$ so polni?
   (d) Izrazi $\Rightarrow$ z vezniki nabora $\{A,0,1\}$.

2. Ali je sklep

$$q \vee s \Rightarrow \neg t \wedge u, \quad t \vee (u \Rightarrow p), \quad p \wedge q \Rightarrow r \vee \neg u \quad \models \quad q \Rightarrow p \wedge r$$

   pravilen?

3. (a) Ali sta formuli

$$\exists y \neg R(y) \Rightarrow \neg (\forall x P(x) \Rightarrow \forall y R(y)) \quad \text{in} \quad \forall x\, (R(x) \vee P(x))$$

   enakovredni?

   (b) Ali sta formuli

$$\exists y \neg R(y) \Rightarrow \neg (\forall x P(x) \Rightarrow \forall y R(y)) \quad \text{in} \quad \forall x \forall y\, (R(x) \vee P(y))$$

   enakovredni?

4. Naj bo na množici števil $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ dana relacija

$$R = \{(1,2),(2,4),(2,5),(3,2),(4,3),(4,6),(5,4)\}$$

   (a) Nariši graf relacije R.
   (b) Ali je $6\, \mathrm{R}^3\, 5$? Kaj pa $1\, \mathrm{R}^3\, 4$?
   (c) Opiši relacijo R^+.
   (d) Poišči tak par $(a,b) \in A \times A$, za katerega je tranzitivna ovojnica relacije $R \cup \{(a,b)\}$ univerzalna relacija v A.

Odgovore dobro utemelji!

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba dveh A4 listov z obrazci.
Rezultati bodo dostopni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

1. popravni kolokvij iz Diskretnih struktur
Ljubljana, 31.1.2011

1. Ali je sklep
$$t \Rightarrow p, p \vee r \Rightarrow t, \neg q \Rightarrow r \models p \vee q$$
pravilen. Kaj pa
$$t \Rightarrow p, p \vee r \Rightarrow t, \neg q \Rightarrow r \models p \wedge q?$$

2. Ali velja enakost
$$(A + C) \setminus (A + B) = (A \cap B) + C?$$
Kaj pa vsebovanost
$$(A + C) \setminus (A + B) \subseteq (A \cap B) + C?$$

3. (a) Kateri ostanki v množici ostankov pri deljenju z 22 so obrnljivi. Koliko jih je?
   (b) Poišči inverz za množenje elementa/ostanka 5.
   (c) Reši sistem enačb
$$\begin{aligned} 4x + 8y &\equiv 16 \pmod{22} \\ 5x + 6y &\equiv 16 \pmod{22} \end{aligned}$$

4. Za vsako celo število $n \geq 3$ definiramo permutacijo $\pi_n \in S_n$ s predpisom:
$$\pi_n(i) = \begin{cases} i+2 & , \text{ če je } i \leq n-2 \\ i+2-n & , \text{ sicer} \end{cases}$$
   (a) Zapiši permutacije π_3, π_4, π_5 in π_6.
   (b) Določi ciklično strukturo in parnost permutacij π_3, π_4, π_5 in π_6.
   (c) Za $n \geq 3$ določi ciklično strukturo permutacije π_n.
   (d) Za katere n je rešljiva enačba
$$\pi^4 = \pi_n?$$

Odgovore dobro utemelji!

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba dveh A4 listov z obrazci. Rezultati bodo dostopni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

1. kolokvij iz Diskretnih struktur UNI
(Ljubljana, 10. 12. 2012)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Dan je nabor logičnih veznikov $\{\veebar, \Rightarrow\}$.

   (a) Izrazi in zapiši 1 in $p \Leftrightarrow q$ samo z uporabo $\veebar$ in $\Rightarrow$.

   (b) Dokaži, da je $\{\veebar, \Rightarrow\}$ poln nabor.

2. Ali je sklep

$$p \vee t, \quad t \vee u \Rightarrow r \vee s, \quad t \Rightarrow \neg s \quad \models \quad p \vee r$$

   pravilen? Kaj pa, če zaključek zamenjamo s p? Pravilen sklep dokaži s pomočjo pravil sklepanja, za napačnega poišči protiprimer.

3. Naj bodo A, B in C poljubne množice. V kakšnem primeru velja enakost

$$(C \cup A) \cap B = (C \cap B) \cup A\,?$$

   S pomočjo analize zgornjega primera (lahko tudi brez) reši sistem enačb z množicami, kjer je množica X neznana.

$$(X \cup A) \cap B = (X \cap B) \cup A$$
$$A \cup X = B \cap X$$

4. Na množici $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ je relacija R podana s predpisom

$$aRb \quad \Leftrightarrow \quad a + b \text{ je liho praštevilo.}$$

   (a) Ali je R refleksivna? Ali je simetrična? Ali je tranzitivna?

   (b) Nariši grafa relacij R in R^2.

   (c) Koliko ekvivalenčnih razredov določa relacija R^2?

Vse odgovore dobro utemelji!

1. kolokvij iz Diskretnih struktur UNI
(Ljubljana, 21. 11. 2013)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Tromestni logični vezik A je dan z opisom: $A(p, q, r)$ *je resničen takrat, ko sta 1 ali 2 izmed* p, q *in* r *resnična*.

   (a) Izrazi $A(p, q, r)$ le z uporabo veznikov $\neg$, $\wedge$ in $\vee$.

   (b) Izrazi veznik $\vee$ le z uporabo A.

   (c) Kateri izmed naborov $\{A, \vee\}$, $\{A\}$, $\{A, \neg\}$ in $\{A, \Rightarrow\}$ so polni nabori?

2. Ali je sklep

$$p \Rightarrow t \vee r, \quad q \Rightarrow t \vee s, \quad r \Rightarrow \neg s \quad \vDash \quad p \wedge q \Rightarrow t$$

   pravilen? Če je pravilen, ga dokaži s pomočjo pravil sklepanja, če je napačen, poišči protiprimer.

3. (a) Katere izmed izjavnih formul

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \qquad \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \qquad \exists x P(x) \vee \exists y Q(y)$$

   so enakovredne?

   (b) Dane so izjavne formule

$$A \sim \exists x(\forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y R(x, y)), \qquad B \sim \exists x(\forall y P(y, x) \Rightarrow \forall y R(x, y)),$$

$$C \sim \exists x(\forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y R(y, x)).$$

   Pokaži, da je formula A enakovredna formuli B in da formula A ni enakovredna formuli C.

   Vse enakovrednosti oz. neenakovrednosti natančno utemelji.

4. Odloči, kaj mora veljati za množici A in B, da bo spodnji sistem rešljiv, nato pa poišči vse množice X, ki rešijo ta sistem!

$$A + (X \cap B) = A + B$$
$$X \cup A \cup B = A$$

Vse odgovore dobro utemelji!

1. kolokvij iz Diskretnih struktur UNI
(Ljubljana, 4. december 2014)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na ***ucilnica.fri.uni-lj.si****.*

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Ali je kateri od spodnjih sklepov veljaven? Če je, ga dokaži, sicer pa poišči protiprimer.

   (a)
   $$(\neg t \vee q) \vee r,\ \neg t \Rightarrow \neg p,\ p \Rightarrow \neg r \quad \models \quad p \Rightarrow q \vee s$$

   (b)
   $$(\neg t \vee q) \vee r,\ \neg t \Rightarrow \neg p,\ p \Rightarrow \neg s \quad \models \quad p \Rightarrow q \vee s$$

2. Tromestni izjavni veznik A definiramo z naslednjim opisom
   $$A(p,q,r) \ \sim \ p \vee \neg(q \wedge r)$$

   (a) Ali lahko z vezniki nabora $\{A, 1\}$ izraziš ekskluzivno disjunkcijo? Kako (na čim krajši način) oziroma zakaj ne.

   (b) Ali lahko z vezniki nabora $\{A, 1\}$ izraziš implikacijo? Kako (na čim krajši način) oziroma zakaj ne.

   (c) Kateri izmed naborov
   $$\{A\},\ \{A,1\},\ \{A,0\},\ \{A,\Leftrightarrow\},\ \{A,\veebar\},\ \{A,\neg\}$$
   so polni in kateri ne? Utemelji.

3. Katere izmed spodnjih formul so med sabo enakovredne. Utemelji.
   $$\exists x(\forall y P(x,y) \Rightarrow \exists y R(x,y))$$
   $$\exists y(\forall x P(x,y) \Rightarrow \exists x R(x,y))$$
   $$\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y R(x,y)$$

4. Naj bodo A, B, C dane množice in X neznana množica. Za sistem
   $$\begin{aligned} X \cup C &= A \cap X \\ B \cap X &= C \setminus A \end{aligned}$$
   določi pogoje za rešljivost. V primerih, ko je sistem rešljiv, poišči vse rešitve.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. kolokvij iz Diskretnih struktur UNI

(Ljubljana, 2. december 2015)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na ***ucilnica.fri.uni-lj.si****.*

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Ali je kateri od spodnjih sklepov veljaven? Če je, ga dokaži, sicer pa poišči protiprimer.

   (a)
   $$p \vee q, \quad p \vee r \Rightarrow \neg q, \quad s \vee r \quad \models \quad \neg p \Rightarrow s$$

   (b)
   $$p \vee q \vee \neg t, \quad p \vee r \Rightarrow \neg q, \quad s \vee r \quad \models \quad \neg p \Rightarrow t$$

2. Dvomestni veznik $\not\Leftarrow$ definiramo kot negacijo nasprotne implikacije,
   $$p \not\Leftarrow q \quad \equiv \quad \neg(q \Rightarrow p).$$

   (a) Ali je $\{\not\Leftarrow\}$ poln nabor?

   (b) Ali je $\{\not\Leftarrow, \Rightarrow\}$ poln nabor?

   (c) Izrazi $\wedge$ in $\vee$ samo z veznikoma $\not\Leftarrow$ in $\Rightarrow$.

3. Ali sta formuli
   $$\forall z \exists y \, (R(z,y) \vee \forall w \neg R(y,w)) \qquad \text{in} \qquad \forall x \exists y R(x,y) \vee \exists x \forall y R(x,y)$$
   enakovredni? Ali je katera od njiju splošno veljavna (tj. enakovredna logični konstanti 1)?

4. Pri poljubno izbranih množicah A, B, C definiramo tudi množici
   $$L = (A \setminus B) \cup (B \cap C) \setminus A \qquad \text{in} \qquad D = A + (B \cap C).$$

   (a) Ali sta množici L in D enaki?

   (b) Ali velja $L \subseteq D$?

   (c) Denimo, da velja $(A \cap B) \subseteq C$. Ali v tem primeru velja enakost $L = D$?

Vse odgovore dobro utemelji!

1. kolokvij iz Diskretnih struktur UNI
(Ljubljana, 8. december 2016)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Eden od spodnjih sklepov je pravilen, drugi pa napačen. Pravilnega dokaži za napačnega pa poišči protiprimer.

$$p \vee q,\ \ p \Rightarrow \neg(r \vee s),\ \ t \vee \neg q \quad \vDash \quad r \Rightarrow t$$

$$p \vee q,\ \ p \Rightarrow \neg(r \vee s),\ \ t \vee \neg q \quad \vDash \quad r \Rightarrow s$$

2. Dvomestni izjavni veznik $\nRightarrow$ definiramo kot $p \nRightarrow q \ \equiv \ \neg(p \Rightarrow q)$.

   (a) Zapiši resničnostno tabelo veznika $\nRightarrow$.

   (b) Zapiši izjavne izraze $\neg p$, $p \vee q$ in $p \Leftrightarrow q$ z uporabo veznikov $\Rightarrow$ in $\nRightarrow$.

   (c) Kateri od naborov $\{\Rightarrow, \nRightarrow\}$, $\{\vee, \nRightarrow\}$ in $\{\Leftrightarrow, \nRightarrow\}$ so polni nabori izjavnih veznikov? *Natančno utemelji!*

3. Za dane množice A, B in C opazujemo spodnji sistem enačb z neznanko X.

$$A \cup X = B \cap X$$
$$B \cap X = A \cup C \cup X$$

   (a) Poišči vse rešitve X, če je $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ in $C = \{3\}$.

   (b) Kaj mora veljati za množice A, B in C, da bo ta sistem rešljiv? Opiši vse rešitve X. V katerem primeru je rešitev X enolična?

4. Na množici števil $A = \{0, 1, 2, \ldots, 8\}$ definiramo relacijo R s predpisom

$$aRb \quad \equiv \quad a \text{ in } b \text{ imata v trojiškem zapisu isto vsoto števk.}$$

   (a) Zapiši trojiške zapise števil iz A.

   (b) Nariši graf relacije R.

   (c) Ali je R ekvivalenčna relacija?

   (d) Ali je R delna urejenost?

Vse odgovore dobro utemelji!

1. kolokvij iz Diskretnih struktur UNI
(Ljubljana, 22. november 2017)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

$\boxed{\textbf{Vse odgovore dobro utemelji!}}$

1. Ali sta spodnja sklepa pravilna? Pravilne sklepe dokaži, za napačne pa poišči protiprimer.

$$\begin{array}{lcl} p \veebar (q \wedge r),\ t \Rightarrow r \vee s,\ t \Leftrightarrow \neg r,\ q \Rightarrow \neg s,\ u \vee t & \models & p \\ p \veebar (q \wedge r),\ t \Rightarrow r \vee s,\ t \Leftrightarrow \neg r,\ q \Rightarrow \neg s,\ u \vee t & \models & t \Rightarrow p \end{array}$$

2. Dan je tromestni izjavni veznik $A(p, q, r) \sim p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg r)$.

   (a) Zapiši izjavne izraze 1, $p \Rightarrow q$ in $p \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ le z uporabo veznika A.

   (b) Kateri od naborov $\{A\}$, $\{A, 0\}$, $\{A, \wedge\}$, $\{A, \Rightarrow\}$ in $\{A, \neg\}$ so polni?

3. Ali sta izjavni formuli A in B enakovredni? Kaj pa C in D?

$$\begin{aligned} A &= \forall x \exists y\ (P(x) \wedge Q(x, y) \Rightarrow R(y)) \\ B &= \exists y \forall x\ (P(x) \wedge Q(x, y) \Rightarrow R(y)) \\ C &= \exists x \forall y\ (P(x) \wedge Q(y, y) \Rightarrow R(x)) \\ D &= \forall y \exists x\ (P(x) \wedge Q(y, y) \Rightarrow R(x)) \end{aligned}$$

4. Ali velja enakost

$$A + B + C = (A + B) \cap C^c \ \cup\ (A + C) \cap B^c \ \cup\ (B + C) \cap A^c?$$

   Kaj pa, če je $A \cap B \cap C = \emptyset$? Če velja enakost, jo dokaži, sicer pa poišči protiprimer.

$\boxed{\textbf{Vse odgovore dobro utemelji!}}$

1. kolokvij iz Diskretnih struktur UNI
(Ljubljana, 27. november 2018)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Ali je kateri od spodnjih sklepov pravilen? Če je, ga dokaži, sicer pa poišči protiprimer.

   (a) $p \vee q,\ q \Rightarrow \neg r,\ \neg p \vee r,\ s \vee (p \Leftrightarrow q) \quad \models \quad s \vee \neg r,$

   (b) $p \vee q,\ q \Rightarrow \neg r,\ \neg p \Rightarrow r,\ p \veebar q,\ \neg(s \vee r) \quad \models \quad \neg q.$

2. Trimestni izjavni veznik V je dan z opisom: Izraz $V(p, q, r)$ je resničen natanko tedaj, ko imata natančno dva izmed p, q in r isto logično vrednost.

   (a) Zapiši pravilnostno tabelo za $V(p, q, r)$.

   (b) Z uporabo veznikov V in $\Leftrightarrow$ zapiši izjavna izraza $p \vee q$ ter $\neg p \vee \neg q$.

   (c) Kateri izmed naštetih naborov izjavnih veznikov so polni nabori:

$$\{V\},\ \{V, 0\}, \{V, 1\}, \{V, \wedge\}, \{V, \vee\}, \{V, \Leftrightarrow\}?$$

3. Dane so izjavne formule

$$\begin{aligned} U &\equiv \forall y \exists x (P(x) \Rightarrow R(x, y)), \\ V &\equiv \forall y (\exists x P(x) \Rightarrow \exists x R(x, y)), \\ W &\equiv \forall y (\forall x P(x) \Rightarrow \exists z R(z, y)). \end{aligned}$$

   Kateri pari zgornjih izjavnih formul so enakovredni? Zakaj oz. zakaj ne?

4. (a) Dokaži, da za množice

$$\begin{aligned} M_1 &= A \setminus (B \cup C), \\ M_2 &= (A + B^c) \cap C, \\ M_3 &= (A + C^c) \cap B \end{aligned}$$

   velja $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = A + B + C$.

   (b) Pri katerih pogojih so množice M_1, M_2 in M_3 paroma disjunktne?

Vse odgovore dobro utemelji!