Diskretne strukture UNI: 2. računski izpit

4. februar 2021

Čas pisanja je 60 minut. Dovoljena je uporaba zapiskov. Uporaba elektronskih pripomočkov za komunikacijo s kolegi ni dovoljena. **Vse odgovore dobro utemelji!**
Vsako nalogo piši na svojo stran. Na vsak list se zgoraj podpiši in navedi številko naloge. Naloge skeniraj po vrsti. Hvala!

---

1. **[35 točk]** Dane so izjavne formule:

$$A \equiv \forall x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall x \forall y (R(x) \wedge R(y)), \quad B \equiv \forall x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall z R(z),$$
$$C \equiv \exists x \exists y \forall z (P(y,x) \Rightarrow R(z)), \quad D \equiv \forall x \forall y (P(x,y) \Rightarrow R(x) \wedge R(y)).$$

   (a) Recimo, da za področje pogovora vzamemo naravna števila $\mathbb{N}$, predikatoma P in R pa damo tak pomen:

$$P(x,y) \ \ldots \ x \geq y \text{ in } y \geq 3, \qquad R(x) \ \ldots \ \varphi(x) \text{ je sodo.}$$

   (Tu je φ Eulerjeva funkcija.) Določi logične vrednosti izjavnih formul A, B, C in D v tej interpretaciji.

   (b) Z uporabo zakonov izjavnega in predikatnega računa utemelji, da so formule A, B in C enakovredne.

   (c) Ali je formula D enakovredna katerikoli od formul A, B ali C? Če je, utemelji kot v (b) delu, sicer pa poišči interpretacijo, v kateri ima D nasprotno logično vrednost.

---

2. **[35 točk]** Naj bo A množica vseh premic v ravnini $\mathbb{R}^2$. Na A definiramo relacijo R:

$$pRq \Leftrightarrow \text{premica } p \text{ seka premico } q \text{ pod pravim kotom.}$$

   Naj bo s_1 simetrala lihih kvadrantov, s_2 simetrala sodih kvadrantov in z zadnja števka tvoje vpisne številke.

   (a) Nariši na isto sliko premico s_2, premico p, ki gre skozi točko $(0,z)$ in za katero je pRs_2, ter premico r, za katero velja $\neg(rRs_2) \wedge \neg(pRr)$.

   (b) Kateri znani relaciji na premicah je enaka relacija R^2?

   (c) Kdaj sta premici v relaciji R^+?

   (d) Za relaciji R^2 in R^+ ugotovi, ali sta ekvivalenčni.

   (e) Za vse ekvivalenčne relacije iz prejšnje točke opiši premice, ki so v ekvivalenčnem razredu premice s_1.

---

3. **[30 točk]** Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 1 & 9 & 6 & 8 & 2 & 5 & 7 & 10 \end{pmatrix} \text{ in } \beta = (3\ 7)(2\ 6)(2\ 10)(2\ 8)(2\ 9)(7\ 3).$$

   (a) Zapiši permutaciji α in β kot produkt disjunktnih ciklov.

   (b) Izračunaj $\gamma = \alpha * \beta$.

   (c) Določi dopustne ciklične strukture permutacije π, ki reši enačbo $\pi^{10} = \gamma$.

   (d) Za vsako od dopustnih cikličnih struktur poišči po eno rešitev enačbe $\pi^{10} = \gamma$.
