Jure Kališnik

Osnove matematične analize

Zapiski z vaj

Ljubljana 2014

Kazalo

1 Števila

(1) Dokaži s pomočjo matematične indukcije, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

(a) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$,

(b) $133 \,|\, 11^{n+1} + 12^{2n-1}$,

(c) $(1+x)^n \geq 1 + nx,$ za $x > -1$.

Rešitev: Pri dokazovanju lastnosti naravnih števil si pogosto pomagamo s principom popolne indukcije. Če hočemo dokazati, da neka lastnost L velja za vsa naravna števila, je dovolj, da pokažemo:

· veljavnost lastnosti L za $n = 1$ (ali včasih $n = 0$),
· da iz veljavnosti lastnosti L za poljuben $n \in \mathbb{N}$ sledi veljavnost lastnosti L za $n + 1$.

(a) Dokazati želimo formulo za vsoto kubov prvih n naravnih števil

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$\underline{n = 1}$:

$$1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4}.$$

$\underline{n \to n+1}$:

Privzemimo sedaj, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Pokazati želimo, da potem velja tudi

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Računajmo:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 &\overset{\text{I.P.}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3, \\ &= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1 \right), \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4n + 4), \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2. \end{aligned}$$

S tem smo pokazali, da zgornja formula velja za vsa naravna števila.

(b) $\underline{n = 1}$:

$$11^{n+1} + 12^{2n-1} = 11^2 + 12^1 = 133$$

$\underline{n \to n+1}$:

Privzemimo sedaj, da $133 \,|\, 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ za nek $n \in \mathbb{N}$. To pomeni, da obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da je $11^{n+1} + 12^{2n-1} = 133k$, od koder sledi

$$11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1} = 11(11^{n+1} + 12^{2n-1}) + 133 \cdot 12^{2n-1}.$$

Z uporabo indukcijske predpostavke od tod sledi

$$11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1} = 133(k + 12^{2n-1}),$$

oziroma $133 \,|\, 11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1}$, kar smo želeli dokazati.

(c) Neenakosti

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

rečemo Bernoullijeva neenakost. Veljavna je tudi, če n zamenjamo s poljubnim realnim številom $r \geq 1$, a je v tem splošnejšem primeru ne moremo dokazati s pomočjo indukcije.

$\underline{n = 1}$:

$$(1+x)^1 \geq 1 + x.$$

$\underline{n \to n+1}$:

Recimo, da za nek n velja neenakost $(1+x)^n \geq 1 + nx$ in pokažimo, da od tod sledi $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$. Po indukcijski predpostavki je

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2.$$

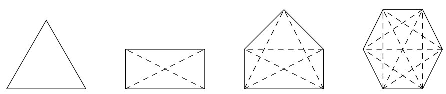
Pri tem smo upoštevali, da je $x > -1$. Ker je $nx^2 \geq 0$, od tod sledi

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$$

□

(2) Ugani formulo za število diagonal konveksnega n-kotnika in jo nato dokaži s pomočjo matematične indukcije.

Rešitev: Trikotnik, štirikotnik, petkotnik in šestkotnik imajo po vrsti 0, 2, 5 in 9 diagonal.

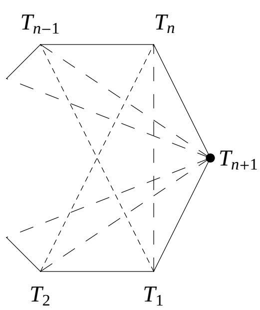


Če bi izračunali še nekaj naslednjih števil diagonal, bi lahko uganili, da je število diagonal konveksnega n-kotnika enako

$$\#\text{diagonal} = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Formula velja za zgoraj omenjene primere, zato privzemimo sedaj, da velja za poljuben konveksen n-kotnik. Radi bi pokazali, da potem velja tudi za poljuben konveksen $(n+1)$-kotnik.

Izberimo torej poljuben konveksen $(n+1)$-kotnik in označimo njegova oglišča po vrsti s $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$.



Po predpostavki ima n-kotnik z oglišči $T_1, T_2, \ldots, T_n$ natanko $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonal. Vsaka izmed teh je tudi diagonala $n+1$-kotnika, niso pa to vse diagonale. Dodati moramo še diagonalo T_1T_n in pa $n-2$ diagonal z enim ogliščem v točki T_{n+1}. Torej je

$$\#\text{diagonal} = \frac{n(n-3)}{2} + 1 + n - 2 = \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Torej formula velja tudi za konveksne $(n+1)$-kotnike.

Opomba: Formulo za število diagonal konveksnega n-kotnika lahko izračunamo tudi z uporabo kombinatorike. Če povežemo vse pare oglišč z daljicami, dobimo $\binom{n}{2}$ daljic. Od tega jih je n stranic, ostale pa so diagonale. Sledi

$$\#\text{diagonal} = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}.$$

□

(3) Izračunaj realni del, imaginarni del in absolutno vrednost naslednjih kompleksnih števil:

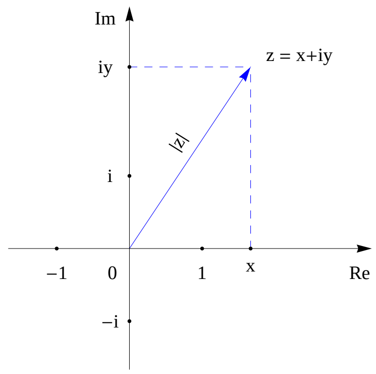
(a) $z = \dfrac{1-3i}{1+3i} + \dfrac{2+2i}{3+i}$,

(b) $z = \dfrac{28+3i}{2+3i} - \dfrac{\overline{(3-2i)^2}}{i}$.

Rešitev: Vsako kompleksno število $z \in \mathbb{C}$ lahko zapišemo v kartezičnem zapisu v obliki

$$z = x + iy,$$

kjer sta x in y realni števili.



Številu x rečemo *realni del*, številu y pa *imaginarni del* števila z in ju označimo:

$$\text{Re}(z) = x,$$
$$\text{Im}(z) = y.$$

Absolutna vrednost kompleksnega števila z je njegova oddaljenost od koordinatnega izhodišča. Označimo jo z

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

(a) Računajmo:

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{1-3i}{1+3i} + \frac{2+2i}{3+i}, \\
&= \frac{(1-3i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} + \frac{(2+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}, \\
&= \frac{1-6i-9}{10} + \frac{6-2i+6i+2}{10}, \\
&= \frac{-8-6i}{10} + \frac{8+4i}{10}, \\
&= -\frac{1}{5}i.
\end{aligned}
$$

Od tod sledi:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z) &= 0, \\
\mathrm{Im}(z) &= -\frac{1}{5}, \\
|z| &= \frac{1}{5}.
\end{aligned}
$$

(b) Sedaj velja:

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{28+3i}{2+3i} - \frac{\overline{(3-2i)^2}}{i}, \\
&= \frac{(28+3i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} - \frac{\overline{9-12i-4}}{i}, \\
&= \frac{56-84i+6i+9}{13} - \frac{5+12i}{i}, \\
&= \frac{65-78i}{13} + (5+12i)i, \\
&= 5-6i+5i-12, \\
&= -7-i,
\end{aligned}
$$

od koder sledi:

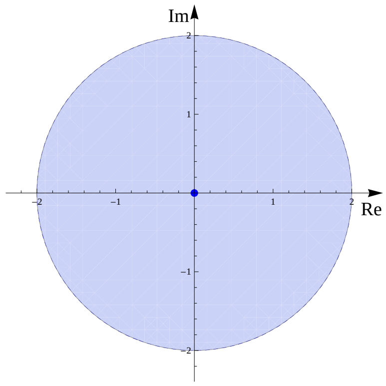
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z) &= -7, \\
\mathrm{Im}(z) &= -1, \\
|z| &= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

□

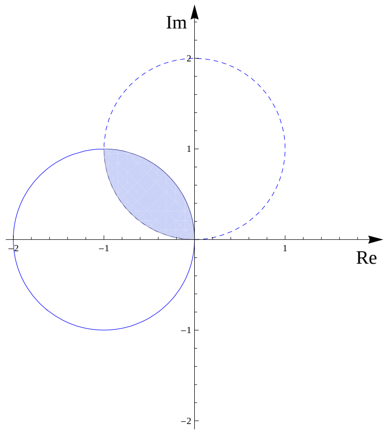
(4) Skiciraj množice točk v $\mathbb{C}$, ki zadoščajo danim pogojem:

(a) $0 < |z| < 2$,
(b) $|z-i| < 1$ in $|z+1| \leq 1$,
(c) $|z| + \mathrm{Re}(z) \leq 2$,
(d) $|z-1| + |z+1| = 5$.

Rešitev: (a) Dana množica je odprt krog s polmerom $R = 2$ in s središčem v koordinatnem izhodišču (središča ne vsebuje):



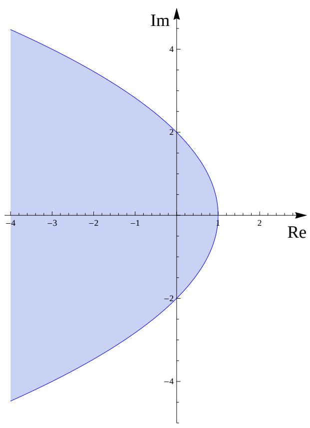
(b) Dana množica je presek dveh krogov:



(c) Pišimo $z = x + iy$. Iz neenačbe $|z| + \mathrm{Re}(z) \leq 2$ potem sledi, da je $x \leq 2$. Če dano neenačbo kvadriramo, pridemo do neenačbe

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} + x &\leq 2, \\ x^2 + y^2 &\leq (2 - x)^2, \\ y^2 &\leq 4(1 - x). \end{aligned}$$

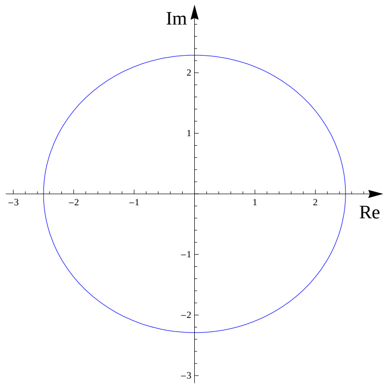
Dana množica je torej območje znotraj parabole $y^2 = 4(1 - x)$:



(d) Rešitev enačbe $|z-1|+|z+1|=5$ so vsa kompleksna števila, ki imajo konstantno vsoto oddaljenosti od števil 1 in -1. Če se spomnimo na geometrijsko definicijo elipse, lahko od tod sklepamo, da bomo dobili elipso z goriščema v točkah 1 oziroma -1. Velika polos je enaka $a=\frac{5}{2}$, mala pa $b=\frac{\sqrt{21}}{2}$. Središče elipse je v koordinatnem izhodišču, njena enačba pa je

$$\frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{\frac{21}{4}}=1.$$

Do te enačbe lahko pridemo tudi po računski poti.



□

(5) Izračunaj s pomočjo de Moivrove formule naslednja kompleksna števila:

(a) $z=(1+i\sqrt{3})^{42}$,

(b) $z=\dfrac{1}{(1+i)^8}$,

(c) $z=\left(\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{2}}\right)^{2013}$.

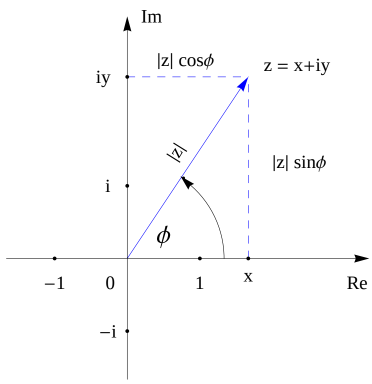
Rešitev: Poleg kartezičnega zapisa kompleksnega števila $z=x+iy$ nam pri računanju pogosto prideta prav polarni zapis

$$z=|z|(\cos\phi+i\sin\phi)$$

in pa Eulerjev zapis

$$z=|z|e^{i\phi},$$

kjer je $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ absolutna vrednost, ϕ pa argument (polarni kot) števila z.



Za nas bo Eulerjev zapis le primeren pripomoček za računanje, če bi znali potencirati na kompleksne eksponente, pa bi videli, da velja Eulerjeva formula

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

S pomočjo de Moivrove formule lahko računamo potence kompleksnih števil. Če je namreč $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) = |z|e^{i\phi}$, potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$z^n = |z|^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = |z|^n e^{in\phi}.$$

(a) Pišimo $w = 1 + i\sqrt{3}$. Potem je $|w| = 2$ in $\phi = \frac{\pi}{3}$. Po de Moivrovi formuli sledi

$$z = w^{42} = 2^{42}\left(\cos\frac{42\pi}{3} + i\sin\frac{42\pi}{3}\right) = 2^{42}.$$

(b) Naj bo sedaj $w = 1 + i$. Potem je $|w| = \sqrt{2}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ in

$$z = \frac{1}{w^8} = \frac{1}{16\left(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}\right)} = \frac{1}{16}.$$

(c) Najprej opazimo, da velja

$$z = \left(\sqrt[3]{\frac{1+i}{2}}\right)^{2013} = \left(\frac{1+i}{2}\right)^{671}.$$

Označimo tokrat $w = \frac{1+i}{2}$. Potem je $|w| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ in

$$z = w^{671} = \frac{1}{\sqrt{2}^{671}}\left(\cos\frac{671\pi}{4} + i\sin\frac{671\pi}{4}\right) = \frac{1}{2^{335}\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{2^{336}}(1-i).$$

□

(6) Reši v obsegu kompleksnih števil dane enačbe oziroma sistem enačb:

(a) $z^3 = 1$,
(b) $z^4 = i$,
(c) $z^2 - (1-4i)z - 5 - 5i = 0$,
(d) $z^2 = \overline{z}$,
(e) $\left|\frac{z}{z+1}\right| = 1$ in $\frac{z}{\overline{z}} = i$.

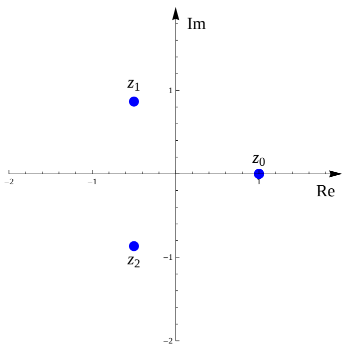
Rešitev: V realnem ima enačba $x^n = a$ za poljuben $a > 0$ ali eno rešitev, če je n lih, ali pa dve rešitvi, če je n sod. V kompleksnem pa ima enačba $z^n = a$ za poljubno neničelno kompleksno število a natanko n različnih rešitev. Posebej pomembne so rešitve enačbe

$$z^n = 1,$$

ki jim rečemo tudi n-ti koreni enote.

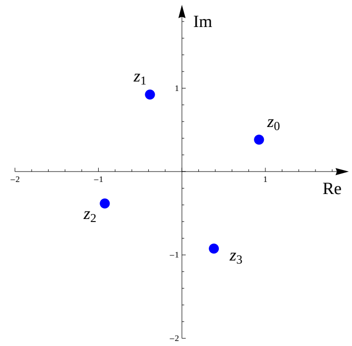
(a) Iščemo rešitve enačbe $z^3 = 1$. Pišimo $z = |z|e^{i\phi}$. Sledi
$$|z|^3 e^{i3\phi} = 1 \cdot e^{i2k\pi}.$$
Vidimo, da je
$$|z| = 1,$$
$$\phi = \frac{2k\pi}{3}.$$
Ker nas zanimajo polarni koti $\phi \in [0, 2\pi)$, pridejo v poštev samo $k \in \{0, 1, 2\}$. Rešitve enačbe so
$$z_k = e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$
Eksplicitno so to števila
$$z_0 = 1,$$
$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Geometrijsko so rešitve enačbe $z^3 = 1$ oglišča enakostraničnega trikotnika, ležijo pa na enotski krožnici.



Opomba: Za splošen n tvorijo n-ti koreni enote oglišča enakostraničnega n-kotnika. Eno izmed oglišč je zmeraj $z_0 = 1$. Če je n lih, je to hkrati tudi edini realni koren enačbe $z^n = 1$. Če je n sod, pa je realen še $z_{\frac{n}{2}} = -1$.

(b) Sedaj rešujemo enačbo $z^4 = i$. Če pišemo $z = |z|e^{i\phi}$, dobimo
$$|z|^4 e^{i4\phi} = 1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}.$$
Od tod dobimo
$$|z| = 1,$$
$$\phi = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$
za $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Rešitve enačbe so torej
$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$
Rešitve enačbe tokrat tvorijo oglišča kvadrata in ležijo na enotski krožnici. Kvadrat je zavrten za kot $\frac{\pi}{8}$ glede na koordinatne osi.



<u>Opomba:</u> n-te korene kompleksnega števila a lahko dobimo tudi na naslednji način. Če pišemo $a = |a|e^{i\phi}$, je $z_0 = \sqrt[n]{|a|}e^{\frac{i\phi}{n}}$ eden izmed n-tih korenov števila a. Preostale n-te korene dobimo, če z_0 pomnožimo z n-timi koreni enote. Vidimo, da n-ti koreni števila a določajo oglišča enakostraničnega n-kotnika, ki leži na krožnici s središčem v 0 in s polmerom $\sqrt[n]{|a|}$. Glede na standardni n-kotnik korenov enote je ta n-kotnik zavrten za kot $\frac{\phi}{n}$.

(c) V tem primeru bomo rešili kompleksno kvadratno enačbo

$$z^2 - (1-4i)z - 5 - 5i = 0.$$

Podobno kot pri realnih enačbah ima tudi ta enačba dve rešitvi, ki ju lahko izračunamo z uporabo znane formule

$$z_{1,2} = \frac{1-4i \pm \sqrt{(1-4i)^2 + 4(5+5i)}}{2} = \frac{1-4i \pm \sqrt{5+12i}}{2}.$$

Kvadratni koren $\sqrt{5+12i}$ moramo sedaj izračunati v kompleksnem. Iščemo kompleksno število $x+iy$, da bo veljalo:

$$(x+iy)^2 = 5+12i,$$
$$x^2 - y^2 + 2xyi = 5+12i.$$

Tako pridemo do sistema enačb:

$$xy = 6,$$
$$x^2 - y^2 = 5,$$

ki ima rešitvi $(3,2)$ in $(-3,-2)$. Od tod sledi, da je

$$\sqrt{5+12i} = \pm(3+2i).$$

Rešitvi kvadratne enačbe sta torej:

$$z_1 = 2 - i,$$
$$z_2 = -1 - 3i.$$

(d) Ena rešitev je $z = 0$, zato v nadaljevanju privzemimo, da je $z \neq 0$. Če enačbo $z^2 = \overline{z}$ pomnožimo z z, dobimo

$$z^3 = |z|^2,$$
$$|z|^3 e^{3i\phi} = |z|^2 e^{i2k\pi}.$$

Od tod dobimo, da je $|z| = 1$ in $\phi = \frac{2k\pi}{3}$ za $k \in \{0, 1, 2\}$. Rešitve enačbe so torej

$$z \in \left\{0, 1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}\right\}.$$

Opomba: Prejšnje enačbe so vse imelo toliko rešitev, kot je bila njihova stopnja. V tem primeru pa vidimo, da to ne velja več, ko imamo opravka z nepolinomskimi enačbami.

(e) Naj bo $z = x + iy$. Iz druge enačbe dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{z}{\overline{z}} &= i, \\ z &= i\overline{z}, \\ x + iy &= i(x - iy), \\ x + iy &= y + ix. \end{aligned}$$

Torej je $x = y$. Če vstavimo to v enačbo $|\frac{z}{z+1}| = 1$, dobimo

$$\begin{aligned} |z| &= |z + 1|, \\ \sqrt{x^2 + x^2} &= \sqrt{(x + 1)^2 + x^2}, \\ x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Rešitev enačbe je torej število $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. $\square$

(7) Naj bosta množici $A, B \subset \mathbb{C}$ definirani z:

$$\begin{aligned} A &= \Big\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1 \text{ in } 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1\Big\}, \\ B &= \Big\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq |z| \leq 1 \text{ in } 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}\Big\}. \end{aligned}$$

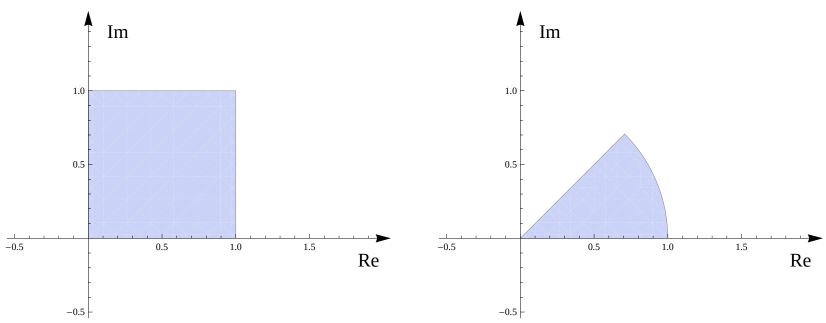
Najprej skiciraj množici A in B, nato pa poskusi ugotoviti, kaj se z A in B zgodi po transformacijah:

(a) $z \mapsto z + 2 + i$,

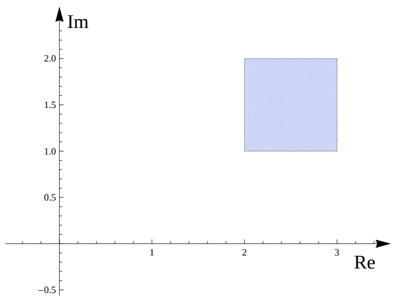
(b) $z \mapsto i\overline{z}$,

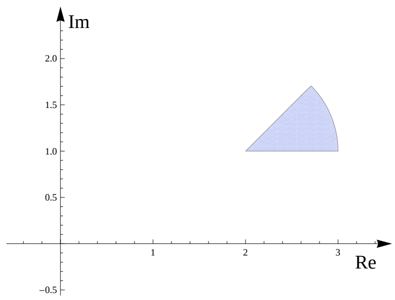
(c) $z \mapsto z^2$.

Rešitev: Množica A je enotski kvadrat, množica B pa krožni izsek enotskega kroga, ki ustreza kotom $\phi \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

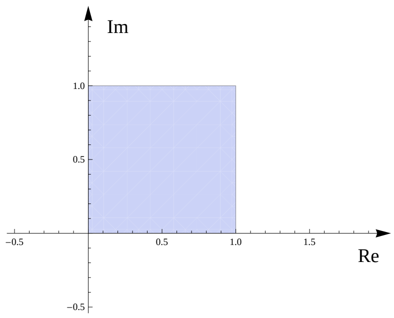


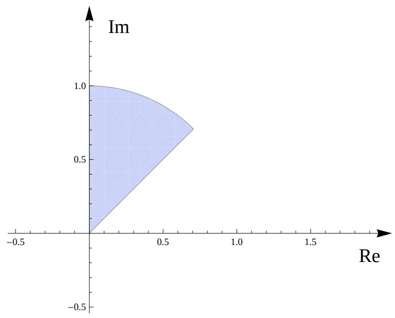
(a) Preslikava $z \mapsto z + 2 + i$ predstavlja premik za dve enoti v desno in za eno enoto navzgor. Množici A in B dana transformacija torej samo premakne, nič pa ne spremeni njune oblike.





(b) Preslikava $z \mapsto i\overline{z}$ množico najprej prezrcali preko vodoravne osi, nato pa zavrti za 90° okoli koordinatnega izhodišča. Enotski kvadrat se pri tej transformaciji preslika nazaj nase, medtem ko se krožni izsek B transformira v krožni izsek, ki ustreza kotom $\phi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.





(c) Za konec si poglejmo še preslikavo $z \mapsto z^2$. Ta preslikava danemu kompleksnemu številu kvadrira absolutno vrednost in podvoji argument. Da bi ugotovili, kako se pri tej transformaciji transformira enotski kvadrat, bomo pogledali, kako se transformirajo njegove stranice. Točke na daljici med 0 in 1 se transformirajo nazaj na to daljico, medtem ko se točke na daljici med 0 in i transformirajo na daljico med 0 in -1. Na daljici med 1 in $1 + i$ so točke oblike $1 + ti$ za $t \in [0, 1]$. Ko jih kvadriramo, dobimo točke oblike

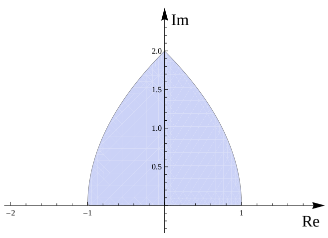
$$(1 + ti)^2 = 1 + 2ti - t^2 = (1 - t^2) + 2ti,$$

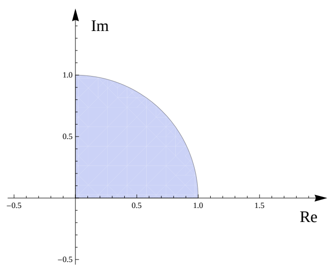
ki predstavljajo lok na paraboli $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ med točkama 1 in $2i$. Na podoben način lahko izračunamo, da se točke na daljici med i in $1 + i$ transformirajo v točke oblike

$$(t + i)^2 = t^2 - 1 + 2ti,$$

ki predstavljajo lok na paraboli $x = \frac{y^2}{4} - 1$ med točkama -1 in $2i$.

Krožni izsek B se transformira v krožni izsek, ki ustreza kotom $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.





□

2 Zaporedja in vrste

(1) Razišči monotonost in omejenost zaporedja s splošnim členom $a_n = \frac{2n+3}{n+1}$. Nato izračunaj limito zaporedja in ugotovi, koliko členov zaporedja je od limite oddaljenih za 0.05 ali več.

Rešitev: Najprej izračunajmo prvih nekaj členov zaporedja (a_n):

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{5}{2} = 2.50, \\ a_2 &= \frac{7}{3} = 2.33, \\ a_3 &= \frac{9}{4} = 2.25, \\ a_4 &= \frac{11}{5} = 2.20. \end{aligned}$$

Iz teh prvih nekaj členov lahko postavimo hipotezo, da je dano zaporedje padajoče. Da je to res, sledi iz naslednjega računa:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq a_n, \\ \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+1} &\leq \frac{2n+3}{n+1}, \\ \frac{2n+5}{n+2} &\leq \frac{2n+3}{n+1}, \\ (2n+5)(n+1) &\leq (2n+3)(n+2), \\ 2n^2+7n+5 &\leq 2n^2+7n+6, \\ 5 &\leq 6. \end{aligned}$$

Iz zapisa

$$a_n = \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1}$$

sledi, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $2 < a_n < 3$, kar pomeni, da je zaporedje omejeno.

Limita zaporedja (a_n) je enaka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n+1}\right) = 2.$$

Po definiciji limite zaporedja to pomeni, da so v poljubnem intervalu okoli števila $a = 2$ vsebovani vsi členi zaporedja od nekega dalje. V našem konkretnem primeru nas bo zanimal interval $(2-\epsilon, 2+\epsilon)$, kjer je $\epsilon = 0.05$. Členi, ki ležijo izven tega intervala, zadoščajo neenakosti

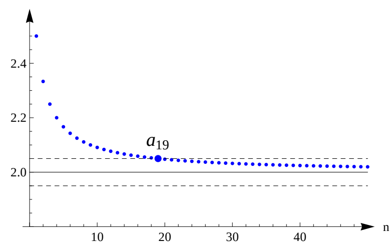
$$|a_n - 2| \geq 0.05.$$

Z uporabo predpisa zaporedja (a_n) od tod dobimo naslednjo neenačbo

$$\begin{aligned} |a_n - 2| &\geq 0.05, \\ \left|\frac{2n+3}{n+1} - 2\right| &\geq 0.05, \\ \left|\frac{2n+3-2n-2}{n+1}\right| &\geq 0.05, \\ \frac{1}{n+1} &\geq \frac{1}{20}, \\ n+1 &\leq 20, \\ n &\leq 19. \end{aligned}$$

Od tod sklepamo, da je od limite za 0.05 ali več oddaljenih samo prvih 19 členov zaporedja (a_n). Preverimo lahko, da je člen $a_{19} = 2.05$ oddaljen natanko 0.05 od limite.

Poglejmo si sedaj še graf zaporedja (a_n). Členi, ki so od limite oddaljeni za manj kot 0.05, ležijo v vodoravnem pasu širine 0.1 okrog limitne vrednosti.



Podobno sliko dobimo pri vsakem konvergentnem zaporedju, le da v splošnem ni nujno, da se členi monotono približujejo limiti, ampak lahko okrog nje tudi malo nihajo. $\square$

(2) Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom:

(a) $a_n = \dfrac{2n^2+n+1}{(n+1)^2}$,

(b) $a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$,

(c) $a_n = \dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$,

(d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$.

Rešitev: Pri računanju limit si bomo pomagali z naslednjimi limitami oziroma s pravili za računanje s konvergentnimi zaporedji:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \pm \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}$,

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$ za vsak $c \in \mathbb{R}$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha} = 0$ za vsak $\alpha > 0$,

6) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ za vsak $|q| < 1$.

Prva štiri pravila veljajo ob predpostavki, da sta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji, pri pravilu 3) pa zahtevamo še, da so členi zaporedja (b_n) in njegova limita neničelni.

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1}{n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 2.$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

(c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{2}{3})^n+1}{2(\frac{2}{3})^n+3} = \frac{1}{3}.$$

(d) $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} \cdot \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}, \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}, \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\square$

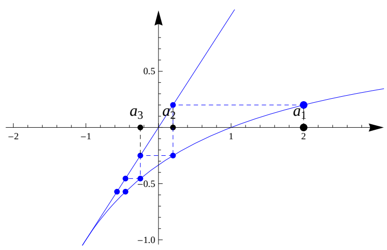
(3) Zaporedje (a_n) je definirano z začetnim členom $a_1 = 2$ in z rekurzivnim predpisom

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 3}.$$

(a) Dokaži, da je zaporedje konvergentno in izračunaj njegovo limito.

(b) Kako sta konvergenca in limita odvisni od izbire začetnega člena a_1?

Rešitev: (a) Sedaj imamo opravka z rekurzivno podanim zaporedjem. Da dobimo občutek, kaj se dogaja s členi zaporedja, si ponavadi pomagamo z naslednjim cik-cak diagramom:



Označimo funkciji $f(x) = x$ in $g(x) = \frac{x-1}{x+3}$. Začnemo s točko na abscisni osi, ki ustreza začetni vrednosti $a_1 = 2$ in poiščemo pripadajočo točko na grafu funkcije g. Nato izmenično vlečemo vodoravno črto do grafa funkcije f ali pa navpično do grafa funkcije g. Projekcije oglišč te lomljene črte na abscisno os so vrednosti zaporedja (a_n).

Risanje cik-cak črt je v bistvu grafična predstavitev računanja zaporednih členov. Točka na premici $y = x$ nam predstavlja vrednost člena a_n. Ko se dvignemo ali spustimo na ustrezno točko na grafu funkcije g, smo prišli v točko (a_n, a_{n+1}). Če želimo najti točko z absciso a_{n+1}, se moramo torej premakniti levo (desno) do premice $y = x$.

Slika nam da slutiti, da je zaporedje padajoče in navzdol omejeno z -1. Privzemimo za trenutek, da je zaporedje (a_n) konvergentno z limito a. Če na rekurzivni zvezi uporabimo limito, dobimo:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{a_n - 1}{a_n + 3} / \lim_{n\to\infty}, \\
a &= \frac{a-1}{a+3}, \\
a^2 + 3a &= a - 1, \\
(a+1)^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Ta enačba ima dvojno rešitev $a = -1$, kar pomeni, da je edini kandidat za limito danega zaporedja število $a = -1$.

Sedaj moramo pokazati še, da je zaporedje konvergentno. To bo sledilo iz dejstva, da je padajoče in navzdol omejeno z -1. Najprej pokažimo s pomočjo indukcije, da velja $a_n \geq -1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Po predpostavki je $a_1 = 2 \geq -1$, zato sedaj privzemimo, da za nek n velja $a_n \geq -1$. Računajmo:

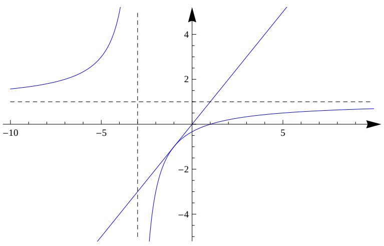
$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &\geq -1, \\
\frac{a_n - 1}{a_n + 3} &\geq -1, \\
a_n - 1 &\geq -a_n - 3, \\
2a_n &\geq -2, \\
a_n &\geq -1.
\end{aligned}
$$

Sedaj pokažimo še, da je zaporedje padajoče:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &\leq a_n, \\
\frac{a_n - 1}{a_n + 3} &\leq a_n, \\
a_n - 1 &\leq a_n^2 + 3a_n, \\
0 &\leq (a_n + 1)^2.
\end{aligned}
$$

Od tod sledi, da je limita zaporedja (a_n) enaka -1.

(b) Če izberemo drugačen začetni člen, bo dobljeno zaporedje še vedno konvergiralo k -1. Za vrednosti $a_1 > -1$ je premislek popolnoma enak tistemu od prej. Pri $a_1 = -1$ bodo vsi členi enaki -1, pri $a_1 < -1$ pa bo najprej nekaj členov negativnih, slej ko prej pa bomo prišli do pozitivnega člena, od koder bo zaporedje skonvergiralo proti -1. Potrebno je omeniti, da pri nekaterih začetnih vrednostih zaporedje ni dobro definirano. To se zgodi, ko je $a_n = -3$ za nek n. V tem primeru namreč ne moremo več rekurzivno izračunati naslednjega člena.



□

(4) Naj bo $a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ korenov}}$ za $n \geq 1$. Izračunaj limito zaporedja (a_n).

Rešitev: Pri tej nalogi imamo zaporedje (a_n) sicer podano eksplicitno, a na težko izračunljiv način. Če izračunamo prvih nekaj členov, bi dobili vrednosti (zaokrožene na tri decimalke):

$$\begin{aligned} a_1 &= 1.414, \\ a_2 &= 1.848, \\ a_3 &= 1.962, \\ a_4 &= 1.990, \\ a_5 &= 1.998. \end{aligned}$$

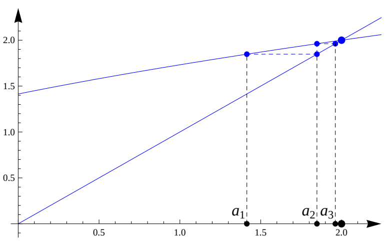
Začetni členi nam dajejo slutiti, da zaporedje (a_n) narašča, vendar še ne vemo točno, ali kam konvergira, ali pa raste v nedogled. Ko računamo člene, lahko opazimo, da jih pravzaprav računamo rekurzivno enega za drugim. To pomeni, da lahko zaporedje (a_n) podamo z rekurzivnim predpisom $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ in z začetnim členom $a_1 = \sqrt{2}$.

Recimo najprej, da je zaporedje (a_n) konvergentno z limito a. Če na rekurzivni zvezi uporabimo limito, dobimo

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2 + a_n} / \lim_{n \to \infty} \\ a &= \sqrt{2 + a} \\ a^2 &= 2 + a. \end{aligned}$$

Rešitvi te enačbe sta $a \in \{-1, 2\}$. Ker so členi zaporedja (a_n) pozitivni, je $\lim_{n \to \infty} (a_n) = 2$, če seveda ta limita obstaja.

Da dobimo občutek, kaj se dogaja s členi zaporedja, si pomagajmo s cik-cak diagramom:



Slika nam da slutiti, da je zaporedje (a_n) naraščajoče in navzgor omejeno z 2. Formalno bomo to domnevo dokazali s pomočjo popolne indukcije. Najprej opazimo, da za $x \in (0, 2)$ velja

$$x < \sqrt{2 + x} < 2.$$

Pokažimo najprej, da je zaporedje navzgor omejeno z 2. Po definiciji je $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Denimo sedaj, da je $a_n < 2$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Če v neenakost $\sqrt{2+x} < 2$ vstavimo $x = a_n$, dobimo $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < 2$.

Pokazati moramo še, da je zaporedje naraščajoče. Ker vsi členi zaporedja (a_n) ležijo na intervalu $(0,2)$, iz enakosti $x < \sqrt{2+x}$ sledi $a_n < \sqrt{2+a_n} = a_{n+1}$.

Zaporedje (a_n) je torej naraščajoče in navzgor omejeno z 2, torej je konvergentno, na začetku pa smo že pokazali, da od tod sledi

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ korenov}} = 2.$$

□

(5) Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom:

(a) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$,

(b) $a_n = \left(2 - \dfrac{n}{n+1}\right)^{2n-1}$,

(c) $a_n = \left(\dfrac{n^2+2n}{n^2+1}\right)^n$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo računali limite oblike

$$\lim_{n\to\infty} f(n)^{g(n)},$$

kjer je $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 1$ in $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = \pm\infty$. S prevedbo na limito $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, lahko izpeljemo, da velja

$$\lim_{n\to\infty} f(n)^{g(n)} = e^{\lim_{n\to\infty}(f(n)-1)g(n)}.$$

(a) Limita osnove je enaka ena, eksponent pa konvergira proti neskončnosti. Zato je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}-1\right)n} = e^{\lim_{n\to\infty} -\frac{n}{n+1}} = e^{-1}.$$

(b) $$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n}{n+1}\right)^{2n-1} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n}{n+1}-1\right)(2n-1)} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}} = e^2.$$

(c) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+1}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+1}-1\right)n} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2+1}} = e^2.$$

□

(6) Izračunaj vsoto danih geometrijskih vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{3^{2n-1}}$.

Rešitev: Pri računanju vsot geometrijskih vrst si pomagamo s formulo

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q}.$$

Pri tem je a začetni člen, q pa količnik geometrijske vrste, za katerega mora veljati $|q| < 1$, da vrsta konvergira.

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n} = \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \ldots = \frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 5.$$

(c) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{3^{2n-1}} = \frac{4}{3^3} + \frac{8}{3^5} + \frac{16}{3^7} + \ldots = \frac{\frac{4}{27}}{1-\frac{2}{9}} = \frac{4}{21}.$$

□

(7) Zapiši dani funkciji kot vsoti geometrijskih vrst in ugotovi, kdaj sta konvergentni:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,

(b) $g(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$.

Rešitev: (a) Funkcijo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ lahko razumemo kot vsoto geometrijske vrste s koeficientom $q = -x^2$. Torej je

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

Vrsta konvergira za $|x| < 1$.

(b) Tokrat je

$$g(x) = \frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} + \ldots\right) = \frac{1}{4} + \frac{x^2}{16} + \frac{x^4}{64} + \ldots$$

Vrsta konvergira za $|x| < 2$. □

(8) Razišči konvergenco danih vrst. Za konvergentne jo tudi izračunaj:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Rešitev: Za poljubno vrsto $\sum a_n$ lahko definiramo zaporedje delnih vsot

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Vrsta $\sum a_n$ potem konvergira, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot. Vsota vrste je definirana s predpisom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (s_n).$$

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$:

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja enakost

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Torej je

$$s_n = a_1+a_2+\cdots+a_n = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right) = \frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.$$

Sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} (s_n) = \frac{3}{2}.$$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$:

Potreben pogoj za konvergenco vrste je, da konvergirajo njeni členi proti 0. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

od tod sklepamo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ divergira.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$:

Členi vrste sedaj sicer konvergirajo proti 0, a ne dovolj hitro. Zato vrsta vseeno divergira. To sledi iz neenakosti

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n},$$

ki velja za vsako naravno število. Ker velja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, od tod sledi tudi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$.

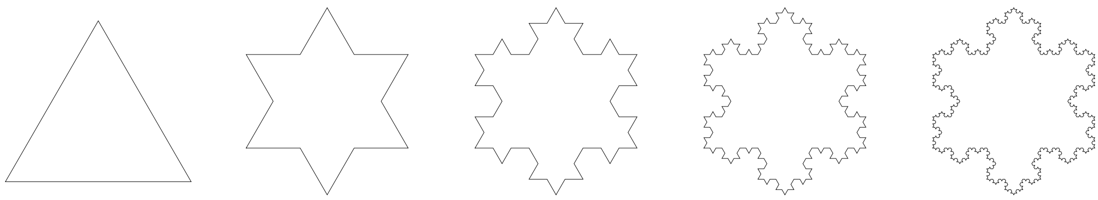
Opomba: Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergira natanko takrat, ko je $\alpha > 1$. □

(9) Izračunaj obseg in ploščino Kochove snežinke.

Rešitev: Kochova snežinka je ravninska množica, ki jo dobimo po naslednjem postopku:

· začnemo z enakostraničnim trikotnikom,
· v vsakem koraku na srednjo tretjino vsake stranice dodamo enakostranični trikotnik.

Prvih nekaj iteracij tega postopka je narisanih na spodnji sliki.



Pokazali bomo, da v limiti dobimo lik z neskončnim obsegom in s končno ploščino.

Označimo z a_1 dolžino stranice prvotnega enakostraničnega trikotnika. Lik, ki ga dobimo v n-ti iteraciji, ima potem dolžino stranice enako $a_n = \frac{a_1}{3^{n-1}}$, vseh stranic pa je $3 \cdot 4^{n-1}$. Obseg tega lika je potem enak

$$o_n = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{a_1}{3^{n-1}} = 3a_1 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

Dobimo geometrijsko zaporedje, ki narašča čez vse meje.

Poglejmo si še ploščino Kochove snežinke. Označimo z S_1 ploščino začetnega trikotnika. Trikotniki, ki jih dodamo v n-ti iteraciji, imajo potem ploščino enako $\frac{S_1}{9^{n-1}}$ in jih je $3 \cdot 4^{n-2}$. V n-tem koraku se torej ploščina poveča za $S_n = 3 \cdot 4^{n-2} \cdot \frac{S_1}{9^{n-1}}$, ploščina Kochove snežinke pa je enaka

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + \frac{1}{3}S_1 + \frac{12}{81}S_1 + \ldots = S_1 + S_1 \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8}{5}S_1.$$

□

3 Funkcije

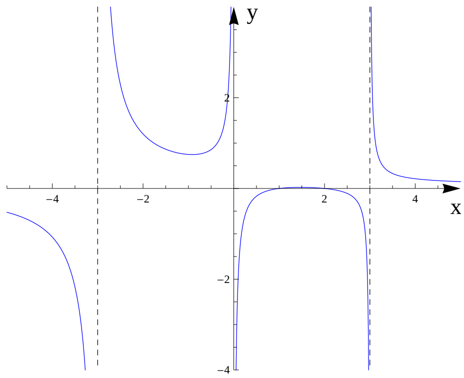
(1) Skiciraj grafe funkcij:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 - 9)}$,

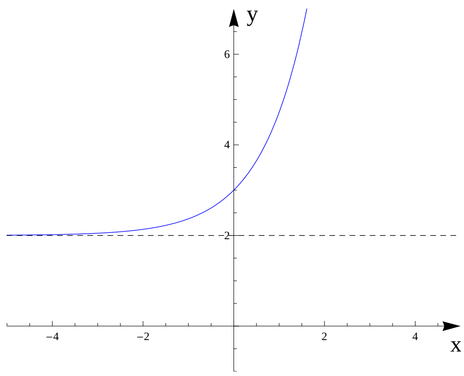
(b) $f(x) = e^x + 2$,

(c) $f(x) = 2 \arccos x$.

Rešitev: (a) Racionalna funkcija $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x(x^2-9)}$ ima pole v točkah $x \in \{-3, 0, 3\}$ in ničli $x_1 = 1$ in $x_2 = 2$. Od tod sledi, da je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$. Premica $y = 0$ je vodoravna asimptota funkcije f pri $x \to \pm\infty$, njena zaloga vrednosti pa je $Z_f = \mathbb{R}$.

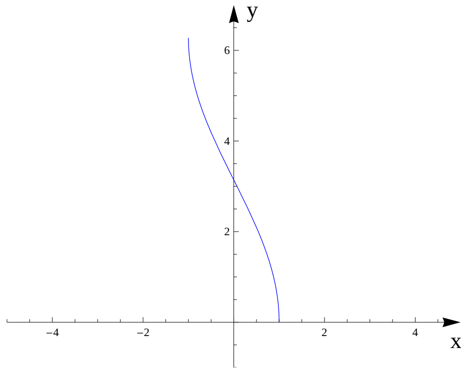


(b) Eksponentna funkcija $f(x) = e^x + 2$ je definirana povsod na $\mathbb{R}$, njena zaloga vrednosti pa je $Z_f = (2, \infty)$.



Funkcija f povsod narašča in je povsod konveksna. Lokalnih ekstremov in prevojev nima. Pri $x \to \infty$ raste čez vse meje, pri $x \to -\infty$ pa ima asimptoto $y = 2$.

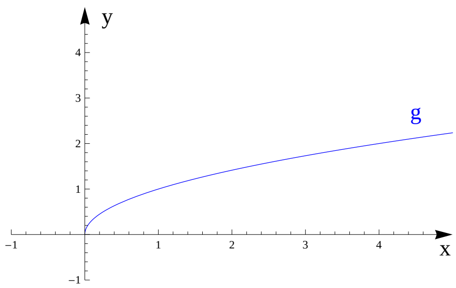
(c) Ločna funkcija $f(x) = 2 \arccos x$ je definirana na $D_f = [-1, 1]$, njena zaloga vrednosti pa je $Z_f = [0, 2\pi]$.

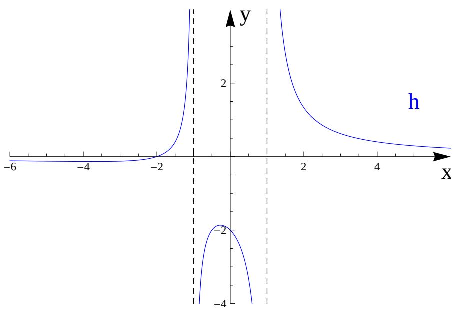


$\square$

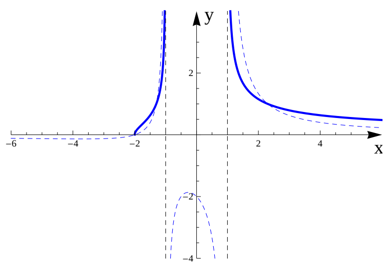
(2) Skiciraj graf funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x^2-1}}$.

Rešitev: Funkcijo $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x^2-1}}$ lahko zapišemo kot kompozitum $f = g \circ h$ korenske funkcije $g(x) = \sqrt{x}$ in racionalne funkcije $h(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$.





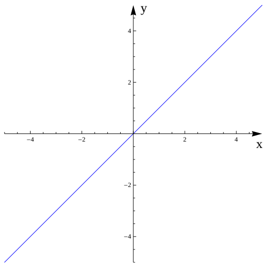
Če hočemo, da bo funkcija f definirana, mora biti definirana funkcija h, ki mora biti hkrati nenegativna. Funkcija h je racionalna funkcija, ki ima pol pri $x = \pm 1$, ničlo pri $x = -2$ ter vodoravno asimptoto $y = 0$. Z grafa funkcije h lahko preberemo, da je torej $D_f = [-2, -1) \cup (1, \infty)$. Če pogledamo graf funkcije g, vidimo, da funkcija g vrednosti manjše od 1 poveča, vrednosti večje od 1 pa zmanjša. S pomočjo tega dejstva lahko skiciramo graf funkcije f. Na spodnji skici je s črtkano črto narisan graf funkcije h, s polno črto pa graf funkcije f.

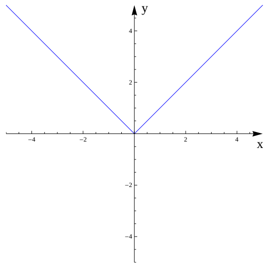


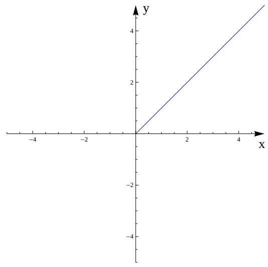
$\square$

(3) Ugotovi, ali predpisi x, $\sqrt{x^2}$ in $(\sqrt{x})^2$ predstavljajo iste funkcije.

Rešitev: Funkcija s predpisom $f(x) = x$ je definirana povsod, njen graf pa je simetrala lihih kvadrantov. Funkcija s predpisom $g(x) = \sqrt{x^2}$ je prav tako definirana povsod in pravzaprav izračuna absolutno vrednost števila x. Funkcija s predpisom $h(x) = (\sqrt{x})^2$ je definirana samo za $x \in [0, \infty)$, kjer se po vrednosti ujema s funkcijo f.







□

(4) Dana je funkcija $f(x) = \log(x^2 - 4)$.

(a) Določi maksimalno definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije f.

(b) Zoži definicijsko območje funkcije f, tako da bo dobljena funkcija injektivna in nato izračunaj njen inverz.

(c) Nariši grafa funkcije in njenega inverza.

Dokaz. (a) Logaritemska funkcija je definirana samo za pozitivna realna števila, zato so v definicijskem območju funkcije f tista števila, za katera je $x^2 - 4 > 0$. Torej je $D_f = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. Je pa funkcija f surjektivna, kar pomeni, da je $Z_f = \mathbb{R}$.

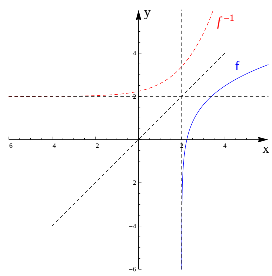
(b) Funkcija f je soda, od koder takoj sledi, da ni injektivna. Je pa injektivna njena zožitev na interval $(2, \infty)$. Izračunajmo inverz te zožitve:

$$\begin{aligned} x &= \log(y^2 - 4), \\ e^x &= y^2 - 4, \\ y &= \sqrt{e^x + 4}. \end{aligned}$$

Inverzna funkcija zožitve $f|_{(2,\infty)}$ je definirana povsod in ima predpis

$$(f|_{(2,\infty)})^{-1}(x) = \sqrt{e^x + 4}.$$

(c) Poglejmo si še grafa funkcije in inverzne funkcije.



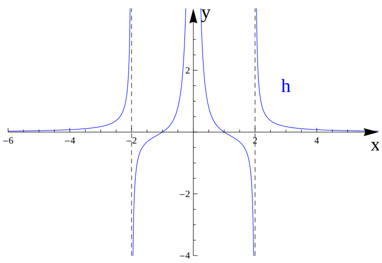
□

(5) Dana je funkcija $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^4-4x^2}\right)$.

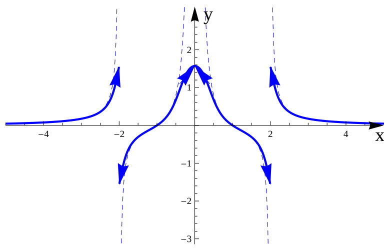
(a) Skiciraj graf funkcije f.

(b) Obravnavaj zveznost funkcije f in ugotovi, ali jo lahko zvezno razširimo na $\mathbb{R}$.

Rešitev: (a) Najprej skicirajmo graf racionalne funkcije $h(x) = \frac{x^2-1}{x^4-4x^2}$.



Če funkcijo h komponiramo s funkcijo arc tan, se bo graf dobljene funkcije namesto k polom približeval k vrednostim $\pm\frac{\pi}{2}$.



(b) Na grafu vidimo, da je funkcija f definirana povsod razen v točkah $x \in \{-2, 0, 2\}$. Zvezno jo lahko razširimo še čez točko $x = 0$, ne moremo pa je zvezno razširiti na cel $\mathbb{R}$, saj ima v točkah $x = \pm 2$ skoka. $\square$

(6) Pokaži, da je funkcija s predpisom $f(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ injektivna in izračunaj njen inverz.

Rešitev: Funkcija f je injektivna, če različne vrednosti preslika v različne vrednosti. To pomeni, da za vsak par $x, y \in \mathbb{R}$ iz enakosti $f(x) = f(y)$ sledi, da je $x = y$. V praksi lahko torej v enačbah krajšamo predpis, ki določa injektivno funkcijo.

Pa denimo torej, da za neka $x, y \in \mathbb{R}$ velja $f(x) = f(y)$. Potem je:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\log\tfrac{1+x}{1-x} &= \tfrac{1}{2}\log\tfrac{1+y}{1-y}, \\
\tfrac{1+x}{1-x} &= \tfrac{1+y}{1-y}, \\
1 + x - y - xy &= 1 + y - x - xy, \\
x &= y.
\end{aligned}$$

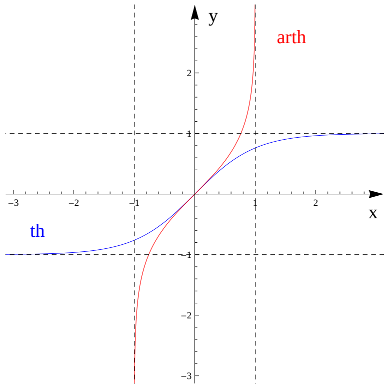
Izračunajmo sedaj inverz funkcije f:

$$\begin{aligned}
x &= \tfrac{1}{2}\log\tfrac{1+y}{1-y}, \\
e^{2x} &= \tfrac{1+y}{1-y}, \\
y &= \tfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \tfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.
\end{aligned}$$

Inverzna funkcija je kvocient hiperboličnega sinusa in kosinusa. Imenujemo jo hiperbolični tangens in jo označimo s th. Funkcija f je inverz hiperboličnega tangensa, rečemo pa ji area hiperbolični tangens in jo označimo z arth.

$$\begin{aligned} \operatorname{th} x &= \tfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \\ \operatorname{arth} &= \tfrac{1}{2} \log \tfrac{1+x}{1-x}. \end{aligned}$$

Poglejmo še grafa funkcij th in arth v istem koordinatnem sistemu.



□

(7) Izračunaj limite funkcij:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$,

(c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{x}$.

Rešitev: Pri računanju limit funkcij veljajo podobna pravila kot pri računanju limit zaporedij, upoštevamo pa naslednji splošni navodili:

· Če je funkcija f zvezna v točki a, je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$,

· Če predpis za funkcijo f ni definiran v točki a, poskušamo najti tak predpis g, ki je definiran v a, in da za x blizu a ($x \neq a$) velja $f(x) = g(x)$.

(a)
$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-5x+6} - x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2-5x+6} - x)(\sqrt{x^2-5x+6} + x)}{\sqrt{x^2-5x+6} + x}, \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-5x+6}{\sqrt{x^2-5x+6}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5+\frac{6}{x}}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1} = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

(b) Sedaj imamo opravka z limito oblike 1^∞, ki jo lahko izračunamo podobno kot pri zaporedjih.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)x^2} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}} = e^3.$$

(c) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-1}{x+2} = -2.$

(d)
$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)},$$
$$= -\lim_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2} = -1.$$

(e) Pri tej nalogi bomo uporabili limito $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(4x)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin(4x)}{4x}\cdot 4 = 4.$$

□

(8) Določi konstanto a, tako da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos^2(x-1)}{(\sqrt{x}-1)^2} & ;\ x>1,\\ \frac{x^2-ax}{x+a} & ;\ x\le 1 \end{cases}$$

zvezna v točki $x=1$.

Rešitev: Naša funkcija je zlepek dveh funkcij v točki $x=1$. V točki $x=1$ bo zvezna, če bosta enaki leva in desna limita v tej točki

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x).$$

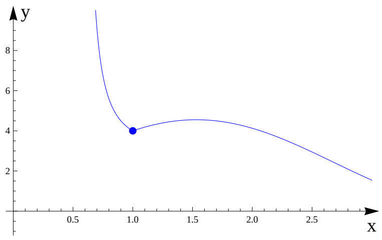
Limiti sta enaki:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\frac{x^2-ax}{x+a} = \frac{1-a}{1+a},$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-}\frac{1-\cos^2(x-1)}{(\sqrt{x}-1)^2} = \lim_{x\to1^-}\frac{\sin^2(x-1)}{(\sqrt{x}-1)^2} = \lim_{x\to1^-}\frac{\sin^2(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)^2\cdot(\sqrt{x}+1)^2}$$
$$= \lim_{x\to1^-}\frac{\sin^2(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to1^-}(\sqrt{x}+1)^2 = 4.$$

Če hočemo, da bo funkcija f zvezna v $x=1$, mora torej veljati

$$\frac{1-a}{1+a} = 4,$$

od koder sledi $a=-\frac{3}{5}$. Konstanto a smo izbrali tako, da se leva in desna krivulja stikata v točki $(1,4)$.



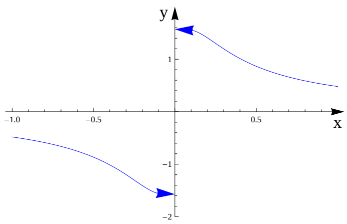
□

(9) Izračunaj levo in desno limito funkcije $f(x) = \arcsin\left(1 - \frac{2}{1+e^{1/x}}\right)$ v točki $x = 0$.

Rešitev: Najprej se spomnimo, da velja $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty$ in $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$. Sledi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \arcsin\left(1 - \frac{2}{1+e^{1/x}}\right) = \arcsin 1 = \tfrac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \arcsin\left(1 - \frac{2}{1+e^{1/x}}\right) = \arcsin(-1) = -\tfrac{\pi}{2}.$$

Ker sta limiti različni, funkcije f ne moremo zvezno razširiti čez točko $x = 0$.



□

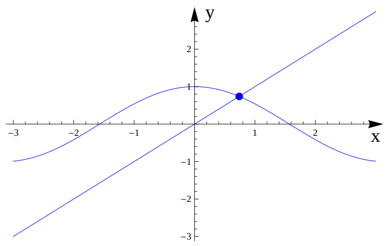
(10) S pomočjo metode bisekcije poišči rešitev enačbe $\cos x = x$ na eno decimalko natančno.

Rešitev: Poznamo metode, s pomočjo katerih lahko rešujemo polinomske, trigonometrične, eksponentne in druge enačbe. V kolikor te metode delujejo, lahko najdemo natančne rešitve enačb. Če točne rešitve ne znamo najti, pa lahko približno rešitev poiščemo s kakšno numerično metodo. Metoda bisekcije je ena izmed njih. Pri njej uporabljamo naslednji algoritem:

· izberemo željeno natančnost,
· enačbo zapišemo v obliki $f(x) = 0$ in izberemo začetni interval, ki vsebuje ničlo,
· na vsakem koraku razdelimo interval na dva dela in izberemo tistega, ki vsebuje ničlo,
· postopek ponavljamo, dokler ne dosežemo željene natančnosti.

Delovanje metode temelji na dejstvu, da je graf zvezne funkcije neprekinjen. Če ima torej funkcija v enem krajišču intervala negativno vrednost, v drugem pa pozitivno vrednost, mora imeti nekje na intervalu ničlo.

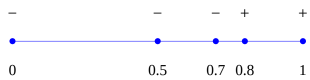
Poskusimo rešiti enačbo $\cos x = x$. Z grafa je razvidno, da bo rešitev na intervalu $[0, 1]$.



Da bi lahko uporabili metodo bisekcije, enačbo najprej prepišimo v obliko $x - \cos x = 0$ in definirajmo funkcijo $f(x) = x - \cos x$. Velja $f(0) = -1$ in $f(1) = 0.46$, zato bomo začeli z intervalom $[0, 1]$.

· $f(0.5) = -0.38,$ zato bo ničla na intervalu $[0.5, 1]$,
· $f(0.8) = 0.10,$ zato bo ničla na intervalu $[0.5, 0.8]$,
· $f(0.7) = -0.06,$ zato bo ničla na intervalu $[0.7, 0.8]$.

Ker je $f(0.75) = 0.02$, bomo za približek vzeli število $x = 0.7$. Bolj natančen približek za rešitev enačbe je $x = 0.739085$.



□

(11) S pomočjo sekantne metode poišči rešitev enačbe $x^2 = 2$ na dve decimalki natančno.

Rešitev: S pomočjo sekantne metode bomo izračunali $\sqrt{2}$ na dve decimalki natančno. Če rešujemo enačbo $f(x) = 0$, lahko približek rešitve poiščemo z naslednjim algoritmom:

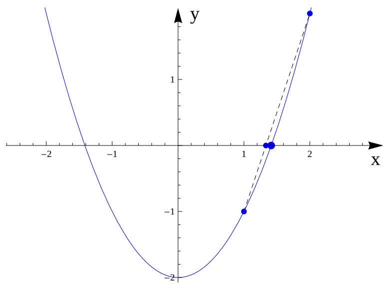
· izberemo začetna približka x_1 in x_2,
· induktivno računamo $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$,
· postopek ponavljamo, dokler ne dosežemo željene natančnosti.

Definirajmo $f(x) = x^2 - 2$ in vzemimo začetna približka za ničlo $x_1 = 1$ ter $x_2 = 2$. Sledi:

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = 1.33,$$
$$x_4 = x_3 - f(x_3)\frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} = 1.40,$$
$$x_5 = x_4 - f(x_4)\frac{x_4 - x_3}{f(x_4) - f(x_3)} = 1.41,$$
$$x_6 = x_5 - f(x_5)\frac{x_5 - x_4}{f(x_5) - f(x_4)} = 1.41.$$

Postopek ustavimo, ko se neka vrednost ponovi dvakrat zapored. Tako smo dobili dobro znani približek
$$\sqrt{2} \approx 1.41.$$

Grafično pri sekanti metodi v vsakem koraku za naslednji približek izberemo presečišče abscisne osi in sekante na graf skozi prejšnja približka.



$\square$

(12) Skiciraj naravna definicijska območja, nivojnice in grafe danih funkcij ter določi njihove zaloge vrednosti:

(a) $f(x,y) = \log(16 - x^2 - y^2)$,

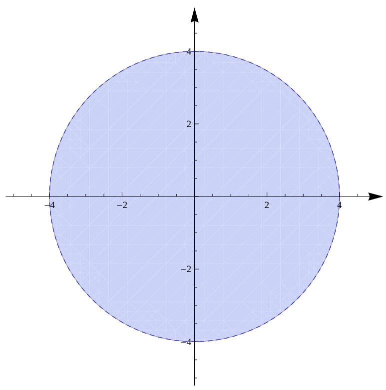
(b) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{y}{x}$,

(c) $f(x,y) = \sqrt{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}$.

Rešitev: (a) Funkcija $f(x,y) = \log(16 - x^2 - y^2)$ bo definirana, če bo izraz v oklepaju pozitiven. To pomeni, da je

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16 - x^2 - y^2 > 0\}.$$

Definicijsko območje funkcije f je torej krog s središčem v točki $(0,0)$ in s polmerom 4, vendar brez robne krožnice.



Nivojnice funkcije f so množice oblike

$$f(x,y) = C,$$

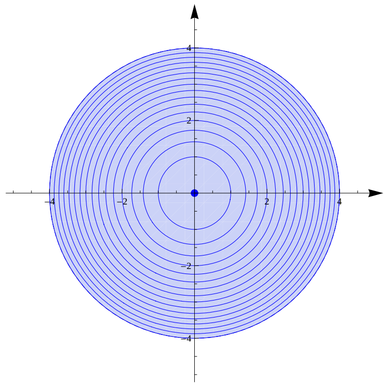
pri različnih izbirah konstante C. Nivojnice funkcije dveh spremenljivk so večinoma krivulje, lahko pa vsebujejo tudi kakšno izolirano točko. Konstante, katerih pripadajoče nivojnice so neprazne, sestavljajo zalogo vrednosti funkcije f.

Nivojnice funkcije f zadoščajo enačbi:

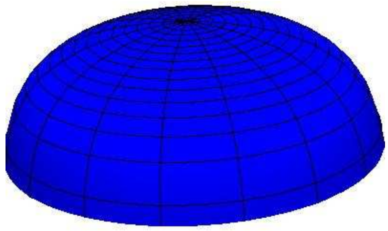
$$\begin{aligned} \ln(16 - x^2 - y^2) &= C, \\ 16 - x^2 - y^2 &= e^C, \\ x^2 + y^2 &= 16 - e^C. \end{aligned}$$

Vrednosti konstante C ležijo na intervalu $(-\infty, \log 16)$, kar pomeni, da je zaloga vrednosti funkcije f interval $Z_f = (-\infty, \log 16)$.

Vidimo, da so nivojnice funkcije f krožnice s središči v točki $(0,0)$ in s polmeri $R \in (0,4)$ ter izolirana točka $T(0,0)$. V tej točki doseže funkcija f globalni maksimum.



Graf funkcije f skiciramo tako, da vsako izmed nivojnic dvignemo na ustrezno višino.



(b) Funkcija $f(x,y) = \arcsin \frac{y}{x}$ bo definirana, če bo:

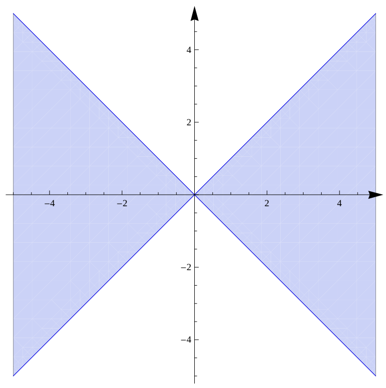
$\cdot\ x \neq 0,$

$\cdot\ -1 \leq \dfrac{y}{x} \leq 1.$

Iz drugega pogoja dobimo, da za $x > 0$ velja $-x \leq y \leq x$, za $x < 0$ pa $-x \geq y \geq x$. Sledi

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x > 0 \wedge -x \leq y \leq x) \vee (x < 0 \wedge x \leq y \leq -x)\}.$$

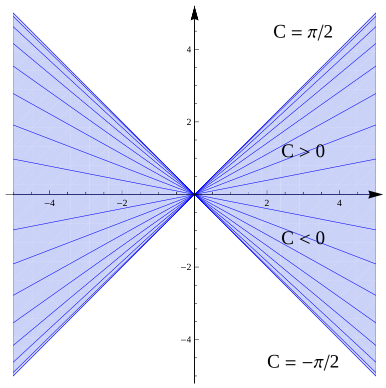
Definicijsko območje funkcije f sestoji iz dveh kvadrantov, ki sta zarotirana za kot $\frac{\pi}{4}$ glede na standardne koordinatne kvadrante.



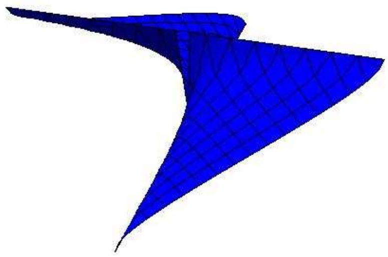
Nivojnice so krivulje, ki zadoščajo enačbi:

$$\begin{aligned} \arcsin\frac{y}{x} &= C, \\ \frac{y}{x} &= \sin C, \\ y &= (\sin C)x. \end{aligned}$$

Možne vrednosti konstante C ležijo na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Za vsak tak C je ustrezna nivojnica premica s smernim koeficientom $\sin C$, vendar brez točke $(0,0)$.



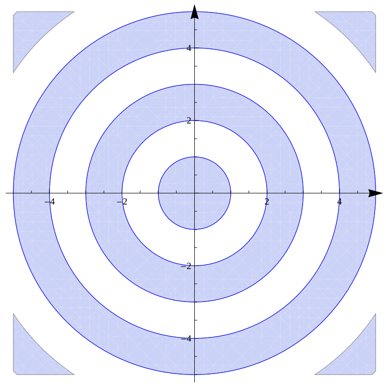
Graf funkcije f skiciramo tako, da vsako izmed teh premic dvignemo na ustrezno višino.



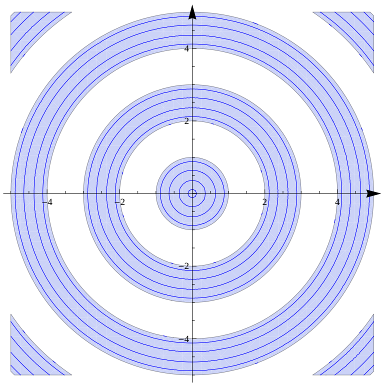
(c) Funkcija $f(x,y)=\sqrt{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}$ bo definirana, če bo $\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\geq 0$. To bo res za

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\in[0,1]\cup[2,3]\cup[4,5]\cup\ldots=\bigcup_{k=0}^{\infty}[2k,2k+1].$$

Definicijsko območje je torej unija kolobarjev z notranjim polmerom $r_k=2k$ in z zunanjim polmerom $R_k=2k+1$ za $k\geq 1$. Pri $k=0$ dobimo krog s polmerom $R=1$.



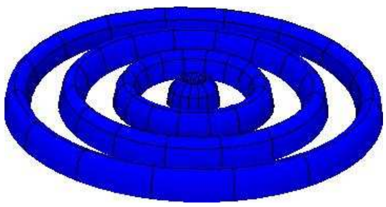
Nivojnice so krožnice s središči v točki $(0,0)$ in s polmeri R, za katere je $\sin(\pi R) \geq 0$. Zaloga vrednosti funkcije f pa je $Z_f = [0,1]$.



V tem primeru je graf funkcije f rotacijska ploskev, ki jo lahko narišemo takole:

· Nad abscisno osjo narišemo graf funkcije $x \mapsto \sqrt{\sin \pi x}$.
· Graf zavrtimo okoli navpične osi.

Poglejmo si še skico.

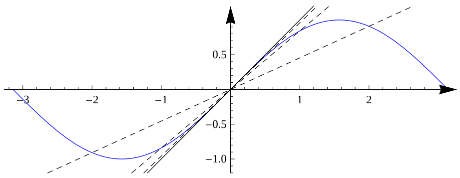


$\square$

4 Odvod

(1) S pomočjo definicije odvoda izračunaj enačbo tangente na krivuljo $y = \sin x$ v točki $(0, 0)$.

Rešitev: Tangenta na krivuljo v dani točki je premica, ki se dotika krivulje v tej točki. Dobimo jo kot limito sekant skozi to točko.



Sekanta skozi točki z abscisama x in $x + h$ na grafu funkcije f ima smerni koeficient

$$k_s = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Smerni koeficient tangente na graf funkcije v točki z absciso x je potem limita teh količnikov

$$k_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

V našem primeru je $x = 0$, od koder sledi

$$k_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Tangenta gre skozi točko $(0, 0)$, zato je njena začetna vrednost $n = 0$, njena enačba pa

$$y = x.$$

□

(2) Izračunaj odvode funkcij:

(a) $h(x) = 3x^3 + 3\cos x + 2e^x - \log x$,

(b) $h(x) = (x^2 - 2)\sqrt{x}$,

(c) $h(x) = x \log x$,

(d) $h(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$,

(e) $h(x) = \tan x$.

Rešitev: Odvode naslednjih funkcij bomo izračunali s pomočjo tabele osnovnih odvodov in pa s pomočjo pravil za odvod vsote, produkta in pa kvocienta funkcij:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Prvi dve formuli veljata za poljubni odvedljivi funkciji f in g, pri tretji pa mora biti funkcija g neničelna. Iz formule za odvod produkta in pa dejstva, da je odvod konstante enak nič, sledi še, da za poljuben $c \in \mathbb{R}$ in za poljubno odvedljivo funkcijo f velja

$$(c \cdot f)'(x) = cf'(x).$$

(a) Funkcija $h(x) = 3x^3 + 3\cos x + 2e^x - \log x$ je vsota elementarnih funkcij, njen odvod pa je vsota odvodov posameznih členov

$$h'(x) = 9x^2 - 3\sin x + 2e^x - \frac{1}{x}.$$

(b) Funkcija $h(x) = (x^2 - 2)\sqrt{x}$ je produkt funkcij $f(x) = x^2 - 2$ in $g(x) = \sqrt{x}$. Z uporabo formule za odvod produkta dobimo

$$h'(x) = 2x \cdot \sqrt{x} + (x^2 - 2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}.$$

(c) Funkcija $h(x) = x \log x$ je produkt funkcij $f(x) = x$ in $g(x) = \log x$. Sledi

$$h'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1.$$

(d) Funkcija $h(x) = \frac{x}{1-x^2}$ je kvocient funkcij $f(x) = x$ in $g(x) = 1 - x^2$, zato je njen odvod enak

$$h'(x) = \frac{1 \cdot (1 - x^2) - x \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2}.$$

(e) Funkcijo $h(h) = \tan x$ lahko zapišemo kot kvocient funkcij $f(x) = \sin x$ in $g(x) = \cos x$. Torej je

$$h'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$\square$

(3) Izračunaj odvode funkcij:

(a) $h(x) = \log(2x + 3)$,

(b) $h(x) = e^{-x^2}$,

(c) $h(x) = \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{x}$.

Rešitev: Pri tej nalogi se bomo naučili, kako se odvaja sestavljene funkcije. Pri tem uporabljamo verižno pravilo

$$(f(y(x)))' = f'(y(x)) \cdot y'(x).$$

Krajše lahko to zapišemo v obliki $(f \circ y)' = f'(y) \cdot y'$. Funkciji f in y poskušamo izbrati tako, da znamo vsako posebej odvajati s pomočjo tabele ali pa ostalih pravil.

(a) Vzemimo $y = 2x + 3$. Potem je $h(x) = \ln y$, $y' = 2$ in

$$h'(x) = (\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{2x + 3}.$$

(b) Tokrat naj bo $y = -x^2$. Sledi $h(x) = e^y$, $y' = -2x$ in

$h'(x) = (e^y)' = e^y \cdot y' = -2x\, e^{-x^2}$.

(c) Sedaj vzemimo $y = \frac{1}{x}$. Sledi $h(x) = \operatorname{arc\,tg} y$, $y' = -\frac{1}{x^2}$ in

$$h'(x) = (\operatorname{arc\,tg} y)' = \frac{1}{1+y^2} \cdot y' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$\square$

(4) S pomočjo logaritmiranja izračunaj odvoda funkcij:

(a) $h(x) = (\sin x)^{\cos x}$,
(b) $h(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

Rešitev: Funkcije oblike $h(x) = f(x)^{g(x)}$ odvajamo tako, da jih najprej napišemo v obliki

$$h(x) = e^{g(x)\log f(x)}$$

in nato odvajamo z uporabo verižnega pravila.
(a) Odvod funkcije $h(x) = (\sin x)^{\cos x} = e^{\cos x \log(\sin x)}$ je

$$h'(x) = e^{\cos x \log(\sin x)} \cdot (\cos x \log(\sin x))' = (\sin x)^{\cos x}(-\sin x \log(\sin x) + \tfrac{\cos^2 x}{\sin x}).$$

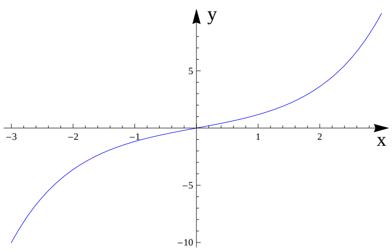
(b) Odvod funkcije $h(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = e^{x\log(\frac{x}{1+x})}$ je

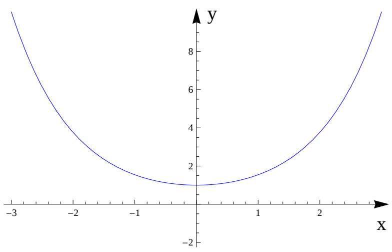
$$h'(x) = e^{x\log(\frac{x}{1+x})}(\log(\tfrac{x}{1+x}) + x \cdot \tfrac{1}{\frac{x}{1+x}} \cdot \tfrac{1+x-x}{(1+x)^2}) = \left(\tfrac{x}{1+x}\right)^x (\log(\tfrac{x}{1+x}) + \tfrac{1}{1+x}).$$

$\square$

(5) Hiperbolični sinus in kosinus sta definirana s predpisoma $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ in $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Izračunaj odvoda njunih inverznih funkcij arsh in arch.

Rešitev: Grafa hiperboličnega sinusa in kosinusa sta na spodnji sliki.





Hiperbolični sinus je liha funkcija, hiperbolični kosinus pa soda in povsod pozitivna. Vzemimo sedaj poljuben $x \in \mathbb{R}$. Potem velja

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1.$$

Ta formula je analog formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, ki velja za običajna sinus in kosinus. Od tod sledi:

$$\operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x},$$
$$\operatorname{sh} x = \pm\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}.$$

Izkaže se, da sta inverza hiperboličnega sinusa in kosinusa podana s predpisoma:

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$
$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Odvoda teh dveh funkcij bi lahko izračunali z odvajanjem teh dveh predpisov, namesto tega pa bomo uporabili formulo za odvod inverzne funkcije. Z odvajanjem enakosti $f^{-1}(f(x)) = x$ dobimo $(f^{-1})' \cdot y' = 1$, kjer je $y = f(x)$. Od tod dobimo formulo

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Vidimo, da moramo najprej izračunati odvoda hiperboličnega sinusa in kosinusa. Velja:

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$
$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

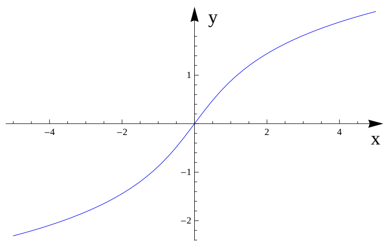
Od tod sedaj dobimo

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

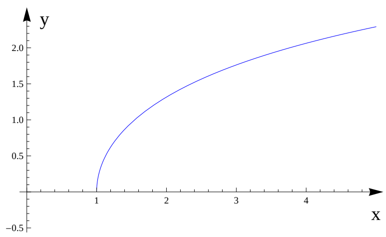
Podobno lahko izpeljemo, da velja

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Funkcija arsh je liha, zvezna in naraščajoča bijekcija iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$.



Funkcija $\operatorname{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je soda, njena zožitev na interval $[0, \infty)$ pa je injektivna. Njen inverz arch je definiran na intervalu $[1, \infty)$.



$\square$

(6) Dokaži, da funkcija

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

ni odvedljiva v točki $x = 0$.

Rešitev: Odvod funkcije $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ je:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{(-2x)}{(1+x^2)^2}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^2-1}} \cdot \frac{(-2x)}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^2}} \cdot \frac{(-2x)}{1+x^2}, \\ &= \frac{-2x}{(1+x^2)|x|\sqrt{x^2+2}}. \end{aligned}$$

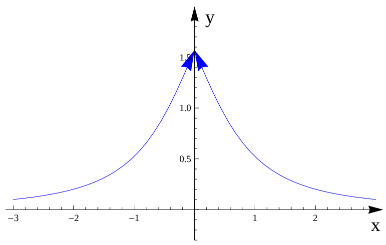
Razlog, da funkcija f ni odvedljiva, je faktor $|x|$ v imenovalcu. Ko se namreč približujemo k $x = 0$ z leve, je $|x| = -x$, zato je

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2x}{(1+x^2)|x|\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2x}{(1+x^2)(-x)\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{2}.$$

Ko pa se približujemo k $x = 0$ z desne, pa je $|x| = x$ in

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{(1+x^2)|x|\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{(1+x^2)x\sqrt{x^2+2}} = -\sqrt{2}.$$

To pomeni, da ima funkcija f v točki $x = 0$ različni levo in desno tangento.



Opomba: Če bi bili povsem natančni, bi morali dokazati, da ne obstaja limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{1+h^2}\right) - \frac{\pi}{2}}{h}.$$

Z uporabo L'Hospitalovega pravila pa se ta limita prevede na limito, ki smo jo računali v nalogi. $\square$

(7) Izračunaj parcialna odvoda naslednjih funkcij:

(a) $f(x, y) = x^2 + y$,

(b) $f(x, y) = \log(x \log(y))$.

Rešitev: Parcialne odvode računamo podobno kot navadne odvode, le da moramo paziti, po kateri spremenljivki odvajamo. Kadar odvajamo po spremenljivki x, si mislimo, da je y konstanta in obratno.

(a) Parcialna odvoda funkcije $f(x,y) = x^2 + y$ sta:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1.$$

(b) Parcialna odvoda funkcije $f(x,y) = \log(x \log(y))$ sta:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\log(y)}{x \log(y)} = \frac{1}{x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x\frac{1}{y}}{x \log(y)} = \frac{1}{y \log(y)}.$$

□

(8) Dana je funkcija dveh spremenljivk $f(x,y) = x^2 y$.

(a) Izračunaj parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$ v točki $(1,1)$.

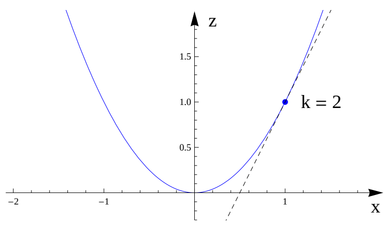
(b) Izračunaj smerni odvod funkcije f v poljubni smeri v točki $(1,1)$. V kateri smeri je največji?

(c) Skiciraj nivojsko krivuljo skozi točko $(1,1)$ in gradient v tej točki. V kakšni smeri kaže gradient glede na nivojsko krivuljo?

Rešitev: (a) Parcialna odvoda funkcije $f(x,y) = x^2 y$ sta $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$. V točki $(1,1)$ tako dobimo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1.$$

(b) Parcialna odvoda geometrično interpretiramo na naslednji način. Če graf funkcije f presekamo z ravnino, ki poteka skozi točko $(1,1)$ in je vzporedna x-osi, dobimo krivuljo $z = x^2$. Koeficient tangente na to krivuljo je potem parcialni odvod po spremenljivki x. Parcialni odvod po x nam torej pove, kako strm je graf v x-smeri.



Če graf presekamo z ravnino, ki je vzporedna y-osi, pa dobimo krivuljo $z = y$. V tej smeri dobimo kar premico, ki sovpada s svojo tangento.

Strmino grafa v smeri, ki oklepa kot ϕ z x-osjo, pa dobimo po formuli

$$f_\phi = \tfrac{\partial f}{\partial x} \cos\phi + \tfrac{\partial f}{\partial y} \sin\phi.$$

V našem primeru je

$$f_\phi(1,1) = 2\cos\phi + \sin\phi.$$

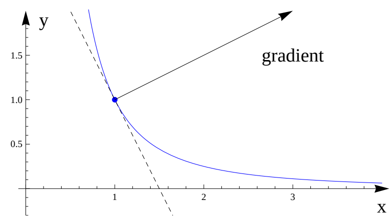
Graf je najbolj strm v smeri gradienta

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2,1).$$

(c) Vrednost funkcije f v točki $(1,1)$ je enaka $f(1,1) = 1$. Nivojnica skozi točko $(1,1)$ je torej krivulja $f(x,y) = 1$ oziroma

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

Vidimo, da je nivojnica pravokotna na gradient.



V splošnem gradient kaže v smeri najhitrejšega naraščanja funkcije, na nivojnici pa se vrednost funkcije sploh ne spremeni. Ti dve smeri sta zmeraj pravokotni. $\square$

(9) Izračunaj gradienta naslednjih funkcij:

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$,

(b) $f(x,y) = (x+y)e^{-x-y}$.

Rešitev: Gradient funkcije dveh spremenljivk f je vektorsko polje

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

(a) V primeru funkcije $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ je:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2},$$

od koder dobimo

$$\operatorname{grad} V = \left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

(b) Parcialna odvoda funkcije $f(x,y) = (x+y)e^{-x-y}$ sta:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x-y} - (x+y)e^{-x-y} = (1-x-y)e^{-x-y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x-y} - (x+y)e^{-x-y} = (1-x-y)e^{-x-y}.$$

Torej je

$$\operatorname{grad} V = \left((1-x-y)e^{-x-y}, (1-x-y)e^{-x-y}\right).$$

□

(10) S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj limite funkcij:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\log(x+1)}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0+} x^n \log x$, $n \in \mathbb{N}$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

Rešitev: S pomočjo odvoda lahko na preprost način izračunamo kakšne limite, ki se sicer izkažejo za trd oreh. To nam pride prav pri študiju asimptotskega obnašanja funkcij.

L'Hospitalovo pravilo: Naj bosta funkciji f in g odvedljivi na neki okolici točke x_0 (razen morda v x_0) in naj gresta obe hkrati proti 0 ali pa obe hkrati proti $\pm\infty$ pri $x \to x_0$. Če obstaja limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, obstaja tudi limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ in obe limiti sta enaki.

Pravilo velja tudi za enostranske limite in limite v neskončnosti.

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\log(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\frac{1}{x+1}} = 1.$$

(b) $$\lim_{x\to 0+} x^n \log x = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{x^{-n}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = -\frac{1}{n} \lim_{x\to 0+} x^n = 0.$$

(c) $$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

(d) $$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\log x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\log x} = 1 \quad \text{(Zadnja enakost sledi iz limite (b)).}$$

□

(11) Skiciraj graf funkcije $f(x) = x \log^2 x$ (določi definicijsko območje, ničle, asimptote, limite na robu definicijskega območja, tangente na robu definicijskega območja, lokalne ekstreme, prevoje, intervale naraščanja in padanja ter intervale konveksnosti in konkavnosti).

Rešitev: Pri skiciranju grafov funkcij so nam v pomoč naslednji podatki, ki jih lahko predhodno izračunamo:

· definicijsko območje, ničle, poli, limite na robu definicijskega območja, asimptote,
· stacionarne točke, intervali naraščanja in padanja, tangente na robu definicijskega območja,
· prevoji, intervali konveksnosti in konkavnosti.

- Funkcija f je definirana na $D_f = (0, \infty)$ in ima ničlo v točki $x = 1$. Limiti na robovih definicijskega območja pa sta:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} 2x = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\ln^2 x = \infty.$$

- Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = \ln^2 x + x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln x(\ln x + 2).$$

Torej je funkcija f naraščajoča na $(0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$ in padajoča na $(e^{-2}, 1)$. V točki $x = e^{-2}$ ima funkcija f lokalni maksimum, v točki $x = 1$ pa lokalni minimum. Velja

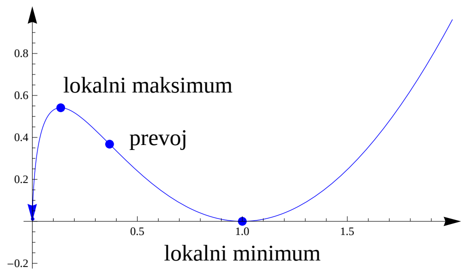
$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \ln x(\ln x + 2) = \infty,$$

od koder sklepamo, da ima graf funkcije f v točki $x = 0$ navpično tangento.

- Drugi odvod funkcije f je enak

$$f''(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1).$$

Od tod sledi, da je funkcija f konveksna na (e^{-1}, ∞) in konkavna na $(0, e^{-1})$, v točki $x = e^{-1}$ pa ima prevoj.



□

(12) Z uporabo diferenciala približno izračunaj naslednje vrednosti:

(a) 1.03^5,

(b) $e^{0.2}$,

(c) $\sqrt{0.97}$.

Rešitev: Naj bo f funkcija, katere vrednost znamo natančno izračunati v točki $x = a$. S pomočjo diferenciala lahko potem približno izračunamo vrednosti funkcije f za x blizu a z uporabo formule

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

Geometrično gre pri tem za aproksimacijo grafa s tangento na graf v točki $x = a$.

(a) Izberimo funkcijo $f(x) = x^5$. Njen odvod je $f'(x) = 5x^4$. Natančno znamo izračunati vrednost funkcije f v točki $a = 1$, zanima pa nas vrednost funkcije f v točki $x = 1.03$. Z uporabo diferenciala dobimo

$$1.03^5 \approx f(1) + f'(1)(1.03 - 1) = 1 + 5 \cdot 0.03 = 1.15.$$

Natančna vrednost je $1.03^5 = 1.1593$.

(b) Sedaj izberimo $f(x) = e^x$ in $a = 0$. Zanima nas vrednost funkcije f v točki $x = 0.2$. Iz $f'(x) = e^x$ sledi

$$e^{0.2} \approx f(0) + f'(0)(0.2 - 0) = 1 + 1 \cdot 0.2 = 1.2.$$

Natančna vrednost je $e^{0.2} = 1.2214$.

(c) Sedaj naj bo $f(x) = \sqrt{x}$ in $a = 1$. Radi bi izračunali vrednost funkcije f v točki $x = 0.97$. Odvod funkcije f je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, zato je

$$\sqrt{0.97} \approx f(1) + f'(1)(0.97 - 1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (-0.03) = 0.985.$$

Natančna vrednost tega korena je $\sqrt{0.97} = 0.9849$. $\square$

(13) (a) Izračunaj Taylorjev polinom reda 2 funkcije $f(x) = \cos x$ okoli točke $x = 0$.

(b) Kakšno napako naredimo pri aproksimaciji $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, če je $|x| < \frac{1}{2}$?

Rešitev: (a) Poljubno n-krat odvedljivo funkcijo f lahko v okolici točke a aproksimiramo s Taylorjevim polinomom reda n, ki je definiran s predpisom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Če vzamemo samo prva dva člena, dobimo aproksimacijo funkcije s tangento v točki $x = a$, medtem ko prvi trije členi določajo kvadratno parabolo, ki najbolje aproksimira funkcijo f v točki a.

Vzemimo sedaj $f(x) = \cos x$. Potem je $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$ in zato

$$T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

(b) Po Taylorjevem izreku lahko napako $R_n(x)$ aproksimacije $f(x) \approx T_n(x)$ ocenimo z izrazom

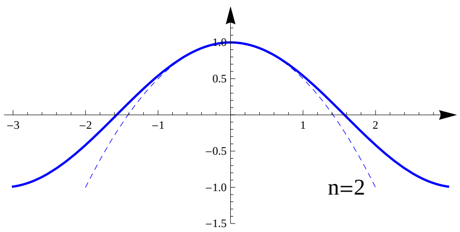
$$|R_n(x)| \leq \max_{t \in I(a,x)} |f^{(n+1)}(t)| \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!},$$

kjer je $I(a,x)$ interval med a in x.

Radi bi ocenili napako pri aproksimaciji funkcije cos v okolici $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ točke $x = 0$ s Taylorjevim polinomom reda 2. Ker je $f'''(x) = \sin x$, je

$$|R_2(x)| \leq \max_{|t|<\frac{1}{2}} \left| \frac{\sin(t)}{3!} x^3 \right| \leq \sin\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{6} \leq \frac{1}{96}.$$

Pri tem smo uporabili oceno $\sin t \leq t$, ki velja za vse $t \geq 0$.



Opomba: Taylorjev izrek nam zagotavlja, da bo napaka pri aproksimaciji manjša od $\frac{1}{96} \approx 0.01$. Vendar pa je to samo ocena za zgornjo mejo napake. V našem primeru je za $|x| < \frac{1}{2}$ napaka pri aproksimaciji $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ manjša od 0.0026. Vidimo torej, da je lahko dejanska napaka precej manjša od ocene, ki jo dobimo s Taylorjevim izrekom. □

(14) Izračunaj enačbo tangente na krivuljo $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16$ v točki $(2, 2)$.

Rešitev: Včasih imamo zvezo med odvisno in neodvisno spremenljivko podano z implicitno enačbo. Ker je eksplicitno izražavo načeloma težko poiskati, lahko odvod izračunamo posredno z odvajanjem enačbe.

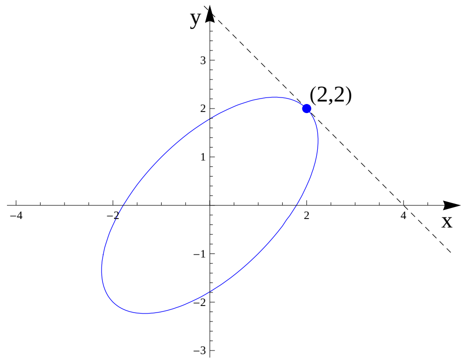
V našem primeru z odvajanjem enačbe $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16$ po x dobimo:

$$\begin{aligned} 10x - 6(y + xy') + 10yy' &= 0, \\ y'(10y - 6x) &= 6y - 10x, \\ y' &= \frac{3y - 5x}{5y - 3x}. \end{aligned}$$

V točki $(2, 2)$ je torej $y' = -1$, enačba tangente pa je

$$y = -x + 4.$$

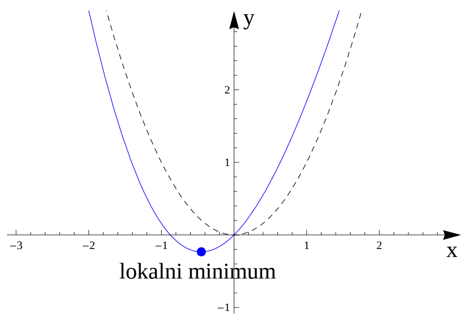
Da se pokazati, da enačba $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16$ določa elipso s polosema $\sqrt{2}$ in $2\sqrt{2}$ v smeri simetral kvadrantov. Točka $(2, 2)$ je eno izmed temen elipse.



□

(15) Z uporabo Newtonove metode poišči stacionarno točko funkcije $f(x) = x^2 + \sin x$ na tri decimalke natančno.

Rešitev: Funkcija f je definirana na celi realni osi. Njen graf oscilira okoli grafa kvadratne parabole $y = x^2$.



Lokalni minimum je v točki, ki zadošča enačbi $f'(x) = 2x + \cos x = 0$. Te enačbe ne znamo natančno rešiti, zato bomo približek rešitve poiskali z Newtonovo metodo.

Newtonova metoda:

Če rešujemo enačbo $g(x) = 0$, kjer je g odvedljiva funkcija, lahko približek rešitve poiščemo z naslednjim algoritmom:

· izberemo začetni približek x_0,

· induktivno računamo $x_{n+1} = x_n - \dfrac{g(x_n)}{g'(x_n)}$,

· postopek ponavljamo, dokler ne dosežemo željene natančnosti.

V našem primeru je $g(x) = f'(x) = 2x + \cos x$ in $g'(x) = 2 - \sin x$. Vzemimo začetni približek $x_0 = 0$ in računajmo:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = -0.500, \\ x_2 &= x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = -0.451, \\ x_3 &= x_2 - \frac{g(x_2)}{g'(x_2)} = -0.450, \\ x_4 &= x_3 - \frac{g(x_3)}{g'(x_3)} = -0.450. \end{aligned}$$

Vidimo, da se začnejo vrednosti ponavljati, zato je $x = -0.450$ približek za stacionarno točko.

Opomba: Newtonova metoda praviloma konvergira hitreje kot bisekcija, a včasih ne deluje. Problem se namreč pojavi, kadar je za neki približek x_k vrednost $f'(x_k)$ blizu 0. V takšnem primeru je naslednji približek x_{k+1} lahko zelo slab.

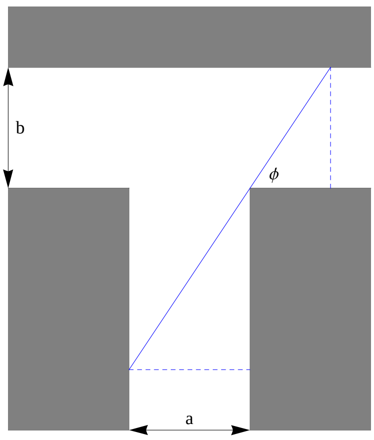
Če funkcija f ni odvedljiva, ali pa je odvod težko računati, lahko uporabimo sorodno sekantno metodo. Postopek je isti, le da uporabljamo rekurzivni korak

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

ki je odvisen od predhodnih dveh členov. □

(16) Hodnik širine $a = 1m$ se nadaljuje pravokotno v hodnik širine $b = 2m$. Kako dolga sme biti lestev, da jo bomo še lahko prenesli vodoravno okrog kolena?

Rešitev: Poglejmo si tloris hodnika.



Lestev želimo zavrteti iz navpične v vodoravno lego. Da bi jo lahko zavrteli do kota ϕ, bo morala biti lestev krajša kot najdaljša daljica, ki jo še lahko pod kotom ϕ včrtamo v hodnik. Dolžina te najdaljše daljice je enaka

$$d(\phi) = \frac{a}{\cos \phi} + \frac{b}{\sin \phi}.$$

Lestev bomo lahko prenesli okrog kolena, če bo njena dolžina krajša od vseh možnih vrednosti $d(\phi)$ za $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Iščemo torej minimum funkcije

$$d : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}.$$

Poiščimo stacionarne točke.

$$d'(\phi) = \frac{a \sin \phi}{\cos^2 \phi} - \frac{b \cos \phi}{\sin^2 \phi}.$$

Sledi

$$d'(\phi) = 0 \iff \frac{\sin^3 \phi}{\cos^3 \phi} = \frac{b}{a} \iff \operatorname{tg} \phi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Funkcija d ima torej eno stacionarno točko $\phi_0 = \operatorname{arc\,tg} \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Z analizo predznaka odvoda ugotovimo, da funkcija d pada na $(0, \phi_0)$ in narašča na $(\phi_0, \frac{\pi}{2})$. Od tod sledi, da doseže d v točki ϕ_0 globalni minimum. Poleg tega velja še $\lim\limits_{\phi \to 0+} d(\phi) = \infty$ in $\lim\limits_{\phi \to \frac{\pi}{2}-} d(\phi) = \infty$.

Izračunajmo sedaj še vrednosti $d(\phi_0)$. Najprej velja

$$\frac{1}{\cos \phi_0} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi_0} = \sqrt{1 + b^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}}}.$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned} d(\phi_0) &= \frac{a}{\cos \phi_0} + \frac{b}{\sin \phi_0}, \\ &= \frac{1}{\cos \phi_0}\left(a + \frac{b}{\operatorname{tg} \phi_0}\right), \\ &= \sqrt{1 + b^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}}}\left(a + b^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}}\right), \\ &= \sqrt{1 + b^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}}}\, a\left(1 + b^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}}\right), \\ &= a\left(1 + b^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}, \\ &= \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Okrog kolena lahko torej prenesemo lestve, ki so krajše od $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. Če vstavimo podatke, dobimo, da sme lestev biti dolga največ $d = 4.16m$. $\square$

(17) Poišči premico, ki po metodi najmanjših kvadratov najbolje aproksimira točke $(-2,2)$, $(-1,1)$, $(0,1)$ in $(1,0)$.

Rešitev: V praksi se pogosto srečamo s problemom, ko moramo dane podatke opisati s funkcijsko zvezo. V kolikor domnevamo, da je ta zveza linearna, lahko poiščemo premico, ki se po kriteriju najmanjših kvadratov najbolje prilega podatkom.

Recimo, da imamo točke $T_1(x_1,y_1)$, $T_2(x_2,y_2),\ldots,T_n(x_n,y_n)$ v ravnini, ki bi jih radi aproksimirali s premico $y=kx+n$. Za mero za kakovost aproksimacije vzamemo funkcijo dveh spremenljivk

$$d(k,n)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(kx_i+n))^2.$$

Določena je z vsoto kvadratov vertikalnih odmikov danih točk od premice. Če vse točke ležijo na dani premici, je $d=0$, sicer pa je d neko pozitivno število. Naša naloga bo najti minimum funkcije d.

Če vstavimo koordinate danih štirih točk, dobimo

$$\begin{aligned} d(k,n) &= (2-(-2k+n))^2+(1-(-k+n))^2+(1-n)^2+(0-(k+n))^2,\\ &= 6k^2+4n^2-4kn+10k-8n+6. \end{aligned}$$

Stacionarne točke funkcije d so rešitve sistema enačb:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial k}(k,n)&=0,\\ \frac{\partial d}{\partial n}(k,n)&=0. \end{aligned}$$

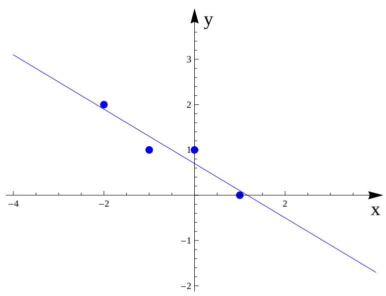
Parcialna odvoda funkcije d sta $\frac{\partial d}{\partial k}=12k-4n+10$ in $\frac{\partial d}{\partial n}=8n-4k-8$. Od tod dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 6k-2n&=-5,\\ -k+2n&=2, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $k=-\frac{3}{5}$ in $n=\frac{7}{10}$. Iz narave problema je jasno, da je v tej stacionarni točki minimum funkcije d. Premica, ki najbolje aproksimira dane točke je torej premica

$$y=-\tfrac{3}{5}x+\tfrac{7}{10}.$$

Poglejmo še skico.



Opomba: Na podoben način lahko izpeljemo naslednji algoritem za iskanje premice, ki po metodi najmanjših kvadratov najbolje aproksimira dane točke.

Najprej moramo izračunati naslednja povprečja:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i,\ \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

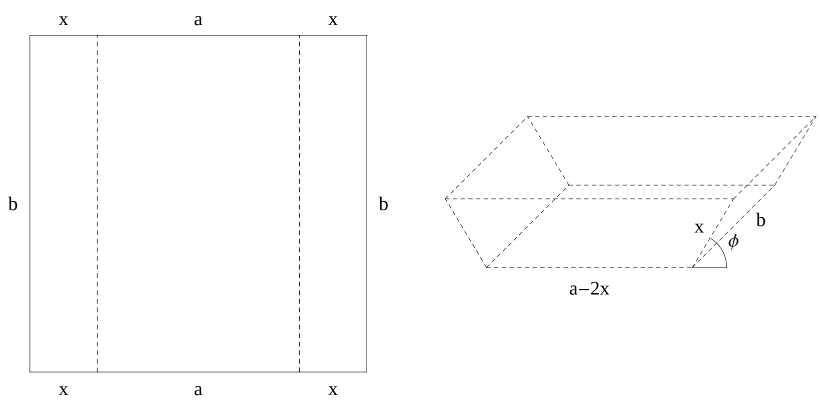
Premica, ki se najbolje ujema z danimi točkami, ima potem enačbo $y = kx + n$, kjer je

$$\begin{aligned} k &= \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \\ n &= \overline{y} - k\overline{x}. \end{aligned}$$

□

(18) Pravokoten karton s stranicama dolžine a in b prepognemo na razdalji x vzdolž obeh daljših stranic za kot ϕ. Določi x in ϕ tako, da bo volumen dobljenega telesa maksimalen.

Rešitev: Ko prepognemo karton, dobimo telo v obliki žleba, ki v prerezu izgleda kot unija pravokotnika in dveh trikotnikov.



Volumen telesa v odvisnosti od spremenljivk x in ϕ je enak

$$V(x,\phi) = (a-2x)x\sin\phi\, b + x^2\sin\phi\cos\phi\, b.$$

Parcialna odvoda funkcije V sta:

$$\begin{aligned} V_x &= (a-4x)\sin\phi\, b + 2x\sin\phi\cos\phi\, b, \\ V_\phi &= (a-2x)x\cos\phi\, b + x^2 b(\cos^2\phi - \sin^2\phi), \end{aligned}$$

kar pomeni, da stacionarne točke funkcije V zadoščajo sistemu enačb:

$$\begin{aligned} \sin\phi\, b(a-4x+2x\cos\phi) &= 0, \\ xb((a-2x)\cos\phi + x(\cos^2\phi - \sin^2\phi)) &= 0. \end{aligned}$$

Ker je $b \neq 0$, bo prvi enačbi zadoščeno, če velja $\sin\phi = 0$ ali $a - 4x + 2x\cos\phi = 0$. V primeru, ko je $\sin\phi = 0$, je $V = 0$, zato gre za minimum. Zato nas zanima primer, ko je

$a - 4x + 2x\cos\phi = 0$. Podobno dobimo minimum tudi, ko velja $x = 0$ v drugi enačbi. Za izračun maksimuma funkcije V moramo torej rešiti sistem enačb:

$$\begin{aligned} a - 4x + 2x\cos\phi &= 0, \\ (a-2x)\cos\phi + x(\cos^2\phi - \sin^2\phi) &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe lahko izpeljemo, da je

$$\cos\phi = 2 - \frac{a}{2x}.$$

Ko to vstavimo v drugo enačbo, dobimo:

$$\begin{aligned} (a-2x)\left(2 - \frac{a}{2x}\right) + x\left(2\left(2 - \frac{a}{2x}\right)^2 - 1\right) &= 0, \\ 2a - 4x - \frac{a^2}{2x} + a + x\left(7 - \frac{4a}{x} + \frac{a^2}{2x^2}\right) &= 0, \\ 3x - a &= 0, \\ x &= \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

Pri $x = \frac{a}{3}$ je $\phi = \frac{\pi}{3}$. Volumen dobljenega telesa bo torej maksimalen, ko bo:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{3}, \\ \phi &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

□

(19) Z uporabo totalnega diferenciala približno izračunaj naslednji vrednosti:

(a) $1.02\log(0.98)$,

(b) $\sin(0.1)e^{-0.2}$.

Rešitev: Podobno kot pri funkcijah ene spremenljivke, lahko z diferencialom približno računamo tudi vrednosti funkcij dveh spremenljivk. Velja namreč

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

Geometrično gre za aproksimacijo grafa s tangentno ravnino na graf v točki $(x,y) = (a,b)$.

(a) Izberimo funkcijo $f(x,y) = x\log y$. Njena parcialna odvoda sta $f_x = \log y$ in $f_y = \frac{x}{y}$. Izberimo $x = 1.02$, $y = 0.98$ ter $a = b = 1$. Z uporabo diferenciala potem dobimo

$$1.02\log(0.98) \approx f(1,1) + f_x(1,1)(1.02-1) + f_y(1,1)(0.98-1) = -0.02.$$

Natančna vrednost (zaokrožena na štiri decimalke) je $1.02\log(0.98) = -0.0206$.

(b) Sedaj izberimo $f(x,y) = \sin x\, e^y$ in $a = b = 0$. Potem je $f_x = \cos x\, e^y$ in $f_y = \sin x\, e^y$ ter

$$\sin(0.1)e^{-0.2} \approx f(0,0) + f_x(0,0)(0.1-0) + f_y(0,0)(-0.2-0) = 0.1.$$

Natančna vrednost (zaokrožena na štiri decimalke) pa je $\sin(0.1)e^{-0.2} = 0.0817$. □

5 Integral

(1) Izračunaj nedoločene integrale s pomočjo substitucije:

(a) $\int (5-2x)^9\, dx$,

(b) $\int \frac{dx}{x^2+9}$,

(c) $\int \frac{2x}{x^2+4}\, dx$,

(d) $\int \frac{dx}{x \log x}$.

Rešitev:

(a) $\int (5-2x)^9\, dx$:

Vzemimo novo spremenljivko $t = 5-2x$. Sledi $dt = -2dx$ in

$$\int (5-2x)^9\, dx = -\frac{1}{2}\int t^9\, dt = -\frac{1}{20}t^{10} + C = \underline{\underline{-\frac{1}{20}(5-2x)^{10} + C}}.$$

(b) $\int \frac{dx}{x^2+9}$:

Vzemimo novo spremenljivko $t = \frac{x}{3}$. Potem je $dt = \frac{dx}{3}$ in

$$\int \frac{1}{x^2+9}\, dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \underline{\underline{\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + C}}.$$

<u>Opomba</u>: Na podoben način lahko izračunamo, da za vsak $a > 0$ velja

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

(c) $\int \frac{2x}{x^2+4}\, dx$:

Uvedimo novo spremenljivko $t = x^2+4$. Sledi $dt = 2x\, dx$ in

$$\int \frac{2x}{x^2+4}\, dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \underline{\underline{\log|x^2+4| + C}}.$$

<u>Opomba</u>: Včasih integriramo funkcije oblike $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$, kjer je g neka funkcija. V takih primerih uvedemo novo spremenljivko $u = g(x)$ (sledi $du = g'(x)dx$), da dobimo

$$\int f(x)\, dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \int \frac{du}{u} = \log|u| + C = \log|g(x)| + C.$$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \log x}$:

Pri računanju bomo uvedli novo spremenljivko $t = \log x$.

$$\int \frac{dx}{x \log x} = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C = \log |\log x| + C.$$

$\square$

(2) Izračunaj nedoločene integrale s pomočjo integracije po delih:

(a) $\displaystyle\int x^2 \log x \, dx$,

(b) $\displaystyle\int \arctan x \, dx$,

(c) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2} \, dx$.

Rešitev: Pri integraciji po delih si pomagamo s formulo

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Ponavadi se pri izbiri u in dv ravnamo po načelu:

· $u \ldots$ funkcija, ki se pri odvajanju poenostavi,
· $dv \ldots$ izraz, ki ga znamo integrirati.

(a) $\displaystyle\int x^2 \log x \, dx$:

Vzemimo $u = \log x$ in $dv = x^2 \, dx$. Sledi $du = \frac{dx}{x}$ in $v = \frac{x^3}{3}$. Tako dobimo

$$\int x^2 \log x \, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^2}{3} \, dx = \underline{\underline{\frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} + C}}.$$

(b) $\displaystyle\int \arctan x \, dx$:

Funkcijo $\arctan x$ bomo odvajali, izraz dx pa integrirali. V dobljenem integralu bomo nato uvedli novo spremenljivko $t = x^2 + 1$. Sledi

$$\begin{aligned} \int \arctan x \, dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{x^2+1} \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t}, \\ &= \underline{\underline{x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C}}. \end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\, dx$:

Tokrat najprej vzemimo novo spremenljivko $t = x^2$, nato pa še integriramo po delih

$$\int x^3 e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int te^t\, dt = \frac{1}{2}\left(te^t - \int e^t\, dt\right) = \frac{1}{2}\left(te^t - e^t\right) + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{x^2}\left(x^2-1\right) + C}}.$$

$\square$

(3) Izračunaj nedoločena integrala racionalnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}\, dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+x}\, dx$.

Rešitev: Za integracijo racionalnih funkcij imamo na razpolago algoritem, ki nas vedno (z več ali manj truda) pripelje do rezultata. Praviloma integriramo racionalne funkcije s pomočjo razcepa na parcialne ulomke:

- S pomočjo deljenja zapišemo racionalno funkcijo v obliki $R(x) = p(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, kjer je polinom r nižje stopnje kot polinom q.
- Polinom q razcepimo na produkt linearnih faktorjev in pa nerazcepnih kvadratnih faktorjev. Omejili se bomo na primere, ko nerazcepnih kvadratnih faktorjev ne bo.
- Funkcijo $\frac{r(x)}{q(x)}$ zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov s pomočjo nastavkov

$$\frac{1}{(x-a)^k} \rightsquigarrow \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}.$$

- Integriramo vsak parcialni ulomek posebej.

(a) $\displaystyle\int \frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}\, dx$:

Najprej bomo razcepili racionalno funkcijo na parcialne ulomke:

$$\begin{aligned}\frac{4x-1}{(x+2)(x-1)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)},\\ &= \frac{x(A+B)+2B-A}{(x+2)(x-1)}.\end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov polinomov v števcu pridemo do sistema dveh enačb za dve neznanki:

$$\begin{aligned}A+B &= 4,\\ -A+2B &= -1,\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 3$ in $B = 1$. Tako dobimo

$$\int \frac{4x-1}{(x+2)(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x-1}\right) dx = \underline{\underline{3\log|x+2| + \log|x-1| + C}}.$$

(b) $\int \frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx$:

Razcep na parcialne ulomke se glasi:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+x} &= \frac{x^2+x+1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}, \\
&= \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2}, \\
&= \frac{x^2(A+B) + x(2A+B+C) + A}{x(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

Od tod dobimo sistem treh enačb za tri neznanke:

$$\begin{aligned}
A + B &= 1, \\
2A + B + C &= 1, \\
A &= 1,
\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 1$, $B = 0$ in $C = -1$. Sledi

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = \underline{\underline{\log|x| + \frac{1}{x+1} + C}}.$$

□

(4) Izračunaj ploščine likov, ki jih omejujejo dane krivulje:

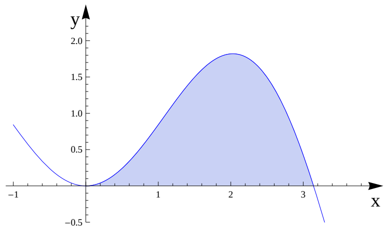
(a) $y = x\sin x$ in $y = 0$ na intervalu $[0, \pi]$,
(b) $y = x^2 + 2x$ in $y = x + 2$,
(c) $y^2 = 2x + 1$ in $y = x - 1$,
(d) $y = \frac{1}{x^2-1}$ in $y = 0$ na intervalu $[2, \infty)$.

Rešitev: Ploščina lika, ki leži med grafoma funkcij $y = f(x)$ in $y = g(x)$ na intervalu $[a, b]$, je enaka

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx.$$

Pri tem vzamemo za g funkcijo, katere graf omejuje lik od zgoraj, za f pa funkcijo, katere graf omejuje lik od spodaj. V nasprotnem primeru bi dobili negativno vrednost ploščine.

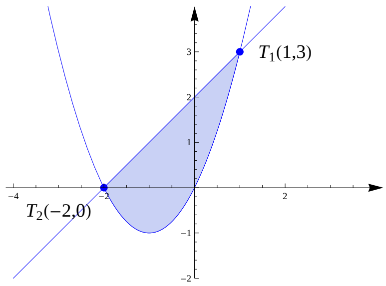
(a) Najprej si poglejmo lik pod grafom funkcije $g(x) = x\sin x$ na intervalu $[0, \pi]$.



Za izračun njegove ploščine bomo funkcijo g integrirali po delih. Označimo $u = x$ in $\sin x\,dx = dv$. Potem je $du = dx$ in $v = -\cos x$, kar nam da

$$S = \int_0^\pi x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

(b) Sedaj iščemo ploščino lika med parabolo $f(x) = x^2 + 2x$ in premico $g(x) = x + 2$.



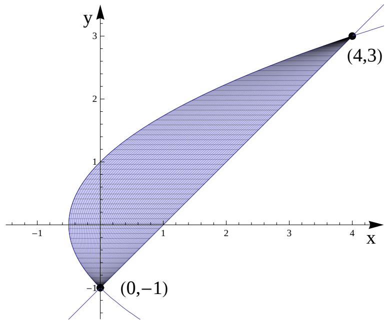
Najprej izračunajmo presečišči grafov danih funkcij:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= x + 2, \\ x^2 + x - 2 &= 0, \\ (x-1)(x+2) &= 0. \end{aligned}$$

Presečišči sta torej v točkah $T_1(1,3)$ in $T_2(-2,0)$. Da bi dobili ploščino iskanega lika, moramo torej integrirati funcijo $g - f$ na intervalu $[-2,1]$:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{1} \big((x+2) - (x^2+2x)\big)\,dx, \\ &= \int_{-2}^{1} \big(-x^2 - x + 2\big)\,dx, \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1}, \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right)\right), \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

(c) Lik je omejen s premico in s parabolo. Da bi izračunali njegovo ploščino, bomo integrirali po spremenljivki y na intervalu $y \in [-1,3]$. Leva in desna robna krivulja našega lika imata v tem primeru enačbi $x(y) = \frac{y^2-1}{2}$ oziroma $x(y) = y + 1$.



Sledi:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{3} \left((y+1) - \left(\frac{y^2-1}{2} \right) \right) \, dy, \\ &= \int_{-1}^{3} \left(y + \frac{3}{2} - \frac{y^2}{2} \right) \, dy, \\ &= \left(\frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}x - \frac{y^3}{6} \right) \Big|_{-1}^{3}, \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

(d) Lik pod grafom funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ na intervalu $[2, \infty)$ je neomejen. V takšnem primeru moramo za izračun njegove ploščine uporabiti izlimitirani integral

$$S = \int_2^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{t \to \infty} \int_2^t f(x) \, dx.$$

Za izračun nedoločenega integrala funkcije f jo moramo najprej razcepiti na parcialna ulomka

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right),$$

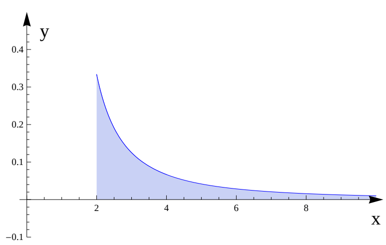
od koder sledi

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\log|x-1| - \log|x+1| \right) + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

Ploščina danega lika je tako enaka

$$S = \int_2^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Bigg|_2^t = \frac{1}{2} \lim_{t \to \infty} \left(\log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \log \tfrac{1}{3} \right) = -\frac{1}{2} \log \tfrac{1}{3} = \frac{\log 3}{2}.$$

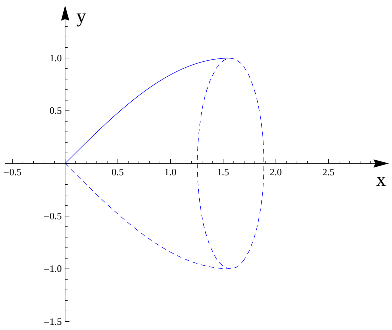
Dani lik ima torej končno ploščino, čeprav je neomejen. Ni pa to zmeraj res.

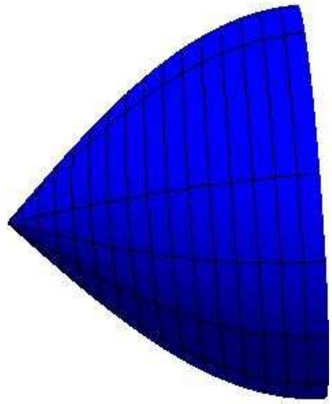


□

(5) Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobimo, če graf funkcije $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ zavrtimo okoli abscisne oziroma ordinatne osi.

Rešitev: Pri vrtenju loka sinusoide okoli abscisne osi dobimo naslednje telo.





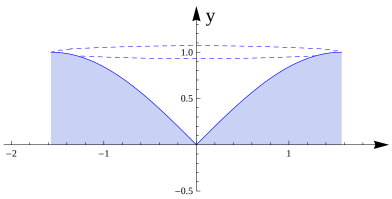
Volumen vrtenine, ki jo dobimo pri vrtenju grafa funkcije f okoli osi x na intervalu $[a, b]$, je enak

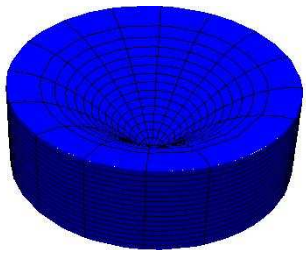
$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

V našem primeru tako dobimo

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \pi \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{4}}}.$$

Pri vrtenju danega loka okoli ordinatne osi dobimo malce drugačno telo.





Volumen vrtenine, ki jo dobimo, če lik pod grafom funkcije f na intervalu $[a, b]$ zavrtimo okoli ordinatne osi, je enak

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx.$$

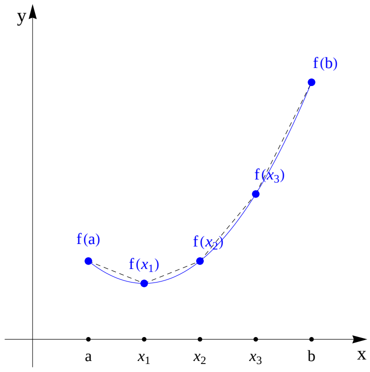
Od tod sledi

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = 2\pi(-x \cos x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{2\pi}}.$$

□

(6) Izpelji formulo za dolžino loka krivulje $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ in nato izračunaj dolžino loka astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ na intervalu $[0, 1]$.

Rešitev: Začeli bomo z izpeljavo formule za dolžino loka krivulje $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$. Osnovni interval $[a, b]$ najprej razdelimo na nekaj enakih delov in lok nad vsakim izmed teh delov nadomestimo z ravno črto.



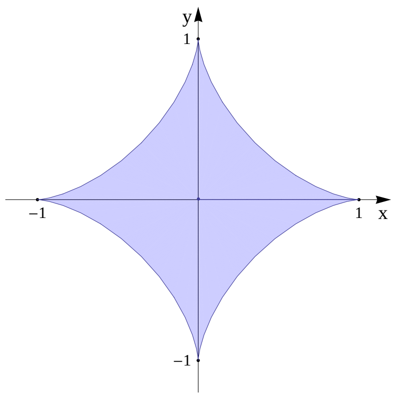
Na ta način smo lok aproksimirali z lomljeno črto. Če vzamemo več delilnih točk, bomo dobili čedalje boljše aproksimacije loka. S pomočjo Pitagorovega izreka dobimo, da je dolžina ene črte enaka

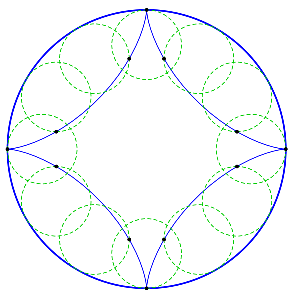
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Pri čedalje finejših delitvah lahko uporabimo aproksimacijo $f'(x) \approx \frac{dy}{dx}$, vsoto dolžin teh črt pa lahko nadomestimo z integralom. Torej je dolžina loka enaka

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

Astroida $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ je krivulja, ki omejuje telo v obliki zvezde. Od tod je tudi dobila ime. Geometrično jo lahko dobimo s kotaljenjem male krožnice s polmerom $r = \frac{1}{4}$ po notranji strani velike krožnice s polmerom $R = 1$.





Eksplicitno jo lahko izrazimo kot graf funkcije

$$f(x) = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Ker je odvod funkcije f enak

$$f'(x) = -(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}},$$

velja

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + (1 - x^{\frac{2}{3}})x^{-\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}}.$$

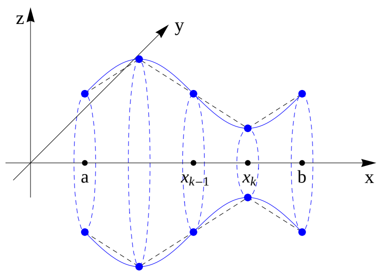
Dolžina loka astroide na intervalu $[0, 1]$ je torej enaka

$$l = \int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}.$$

$\square$

(7) Izpelji formulo za površino plašča vrtenine, ki jo dobimo, če graf funkcije $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ zavrtimo okoli abscisne osi. Nato izračunaj površino plašča vrtenine, ki jo dobimo, če graf funkcije $f(x) = 2\sqrt{x}$ na intervalu $[0, 3]$ zavrtimo okoli abscisne osi.

Rešitev: Spet vzemimo krivuljo $y = f(x)$ in jo rotirajmo okoli osi x na intervalu $[a, b]$.



Krivuljo $y = f(x)$ bomo, podobno kot pri izračunu dolžine loka, aproksimirali z lomljeno črto. Pri rotaciji te lomljene črte okoli abscisne osi bomo dobili telo, katerega plašč je sestavljen iz n plaščev prisekanih stožcev.

En tak prisekan stožec ima širino $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ in srednji obseg $o = 2\pi R$, zato je njegova površina enaka

$$dP = o\, ds = 2\pi R \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

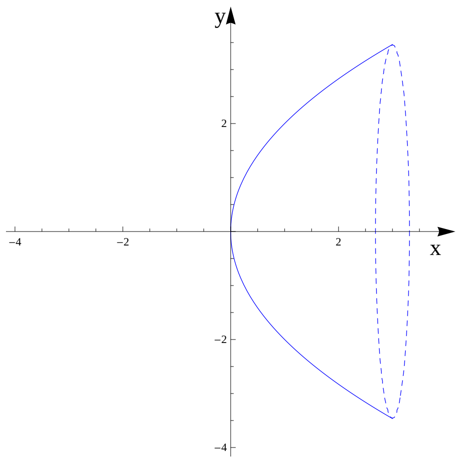
Ko delamo čedalje finejše delitve intervala $[a, b]$, lahko vzamemo $R \approx f(x)$ in $f'(x) \approx \frac{dy}{dx}$, od koder dobimo formulo

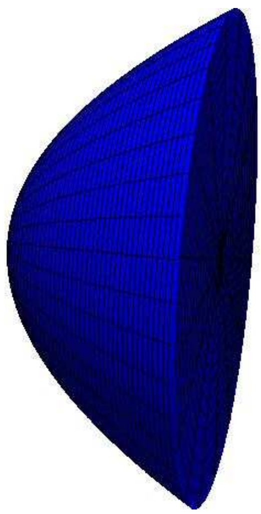
$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

V našem primeru je $f(x) = 2\sqrt{x}$ in $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, od koder dobimo:

$$
\begin{aligned}
P &= 2\pi \int_0^3 2\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, dx, \\
&= 4\pi \int_0^3 \sqrt{x+1}\, dx, \\
&= 4\pi \cdot \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3, \\
&= \frac{8\pi}{3} \left(4^{\frac{3}{2}} - 1\right), \\
&= \underline{\underline{\frac{56\pi}{3}}}.
\end{aligned}
$$

Poglejmo še sliko telesa.





□

6 Diferencialne enačbe

(1) Reši diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami:

(a) $y' = 2x(1+y^2)$,
(b) $xyy' = 1-x^2$,
(c) $y' = 2y$, $y(0)=3$,
(d) $y' + xy = 0$, $y(0) = 1$.

Rešitev: Diferencialna enačba ima *ločljive spremenljivke*, če jo lahko zapišemo v obliki

$$y' = f(x)g(y)$$

za neki zvezni funkciji f in g. Diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami rešujemo po naslednjem postopku:

(1) Zapišemo $y' = \frac{dy}{dx}$,
(2) enačbo preoblikujemo tako, da ločimo spremenljivki vsako na svojo stran,
(3) integriramo vsako stran enačbe posebej,
(4) izrazimo $y = y(x)$.

(a) $y' = 2x(1+y^2)$:

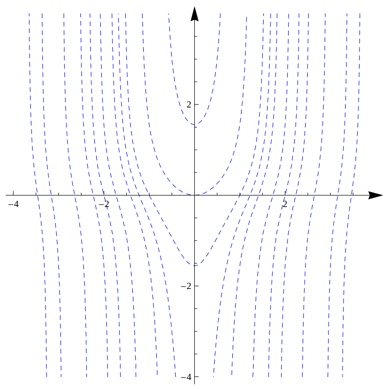
Računajmo:

$$\begin{aligned} y' &= 2x(1+y^2), \\ \frac{dy}{1+y^2} &= 2x\,dx, \\ \arctan y &= x^2 + C. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$y(x) = \underline{\underline{\tan(x^2+C)}}.$$

Za vsako izbiro konstante C dobimo natanko določeno rešitev enačbe. Že na tem zelo preprostem zgledu vidimo, da imajo rešitve enačbe pole in torej niso definirane na celotni realni osi.



(b) $xyy' = 1 - x^2$:

V tem primeru imamo

$$
\begin{aligned}
xyy' &= 1 - x^2, \\
yy' &= \frac{1 - x^2}{x}, \\
y\,dy &= \left(\frac{1}{x} - x\right)\,dx, \\
\frac{1}{2}y^2 &= \log|x| - \frac{x^2}{2} + C.
\end{aligned}
$$

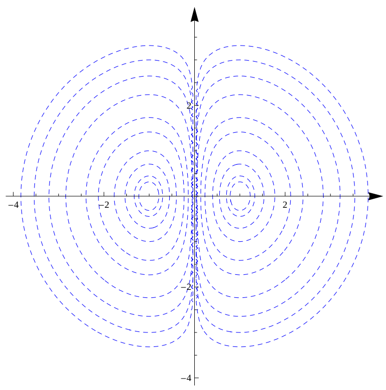
Splošna rešitev enačbe je torej

$$
y(x) = \underline{\underline{\pm\sqrt{2\log|x| - x^2 + 2C}}}.
$$

Diferencialna enačba $xyy' = 1 - x^2$ ni v standardni obliki, saj y' ni eksplicitno izražen. Če izrazimo

$$
y' = \frac{1 - x^2}{xy}
$$

bo enačba dobro definirana le na točkah izven koordinatnih osi. Družina rešitev sestoji iz štirih poddružin, vsake v svojem kvadrantu. Opazimo lahko simetrijo rešitev glede na zrcaljenje preko abscisne in pa ordinatne osi. Dobro je tudi razvidno, da rešitve 'obkrožajo' točki $(1, 0)$ in $(-1, 0)$.



(c) $y' = 2y,\ y(0) = 3$:

Poglejmo si še, kako lahko z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo natanko določeno rešitev. Najprej poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$
\begin{aligned}
y' &= 2y, \\
\frac{dy}{y} &= 2\,dx, \\
\log y &= 2x + c, \\
y &= e^{2x+c}, \\
y &= Ce^{2x}.
\end{aligned}
$$

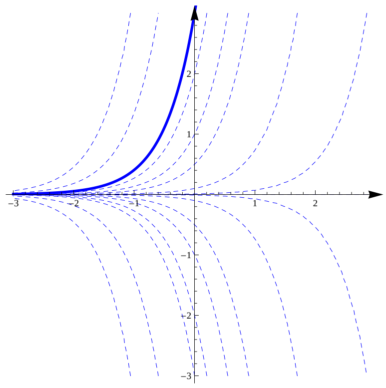
Z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo

$$3 = y(0) = Ce^{2\cdot 0} = C,$$

od koder sledi $C = 3$. Rešitev enačbe je torej funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{3e^{2x}}}.$$

Poglejmo še grafe splošnih rešitev in pa rešitve, ki ustreza začetnemu pogoju.



(d) $y' + xy = 0,\ y(0) = 1$:

Splošna rešitev diferencialne enačbe $y' + xy = 0$ je:

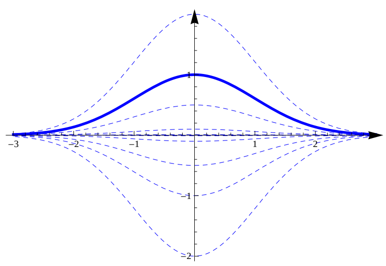
$$\begin{aligned}\frac{dy}{y} &= -x\,dx,\\ \log y &= -\frac{x^2}{2} + c,\\ y &= Ce^{-\frac{x^2}{2}}.\end{aligned}$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo

$$1 = y(0) = Ce^{0} = C,$$

od koder sledi $C = 1$. Rešitev enačbe je funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{e^{-\frac{x^2}{2}}}}.$$



$\square$

(2) Reši linearne diferencialne enačbe:

(a) $y' - 3y = 3$,
(b) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$,
(c) $y' - y = e^{2x}$, $y(0) = 2$,
(d) $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$, $y(1) = 8$.

Rešitev: Linearna diferencialna enačba prvega reda je diferencialna enačba oblike

$$y' + f(x)y = g(x)$$

za neki zvezni funkciji f in g. Če je $g = 0$, je enačba *homogena*, sicer pa je *nehomogena*. Linearne diferencialne enačbe prvega reda rešujemo v dveh korakih:

(1) Poiščemo rešitev prirejene homogene enačbe $Cy_1(x)$,
(2) splošno rešitev poiščemo z nastavkom $y(x) = u(x)y_1(x)$.

(a) $y' - 3y = 3$:

Homogeni del:

Prirejena homogena enačba linearne diferencialne enačbe je zmeraj enačba z ločljivimi spremenljivkami. V našem primeru je to enačba:

$$\begin{aligned} y' - 3y &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= 3\,dx, \\ \log y &= 3x + c, \\ y &= e^{3x+c}, \\ y &= Ce^{3x}. \end{aligned}$$

Pri linearni diferencialni enačbi je rešitev homogene enačbe zmeraj oblike

$$Cy_1(x),$$

zato ponavadi imena konstant izberemo tako, da imamo na koncu konstanto C.

Nehomogeni del:

Splošno rešitev linearne diferencialne enačbe lahko poiščemo z metodo variacije konstante. Naj bo $y_1(x) = e^{3x}$ rešitev homogene enačbe in vzemimo nastavek

$$y(x) = u(x)e^{3x},$$

ki ga vstavimo v enačbo, od koder z integriranjem dobimo $u(x)$. V našem primeru je $y'(x) = u'(x)e^{3x} + 3u(x)e^{3x}$. Če to vstavimo v enačbo, dobimo

$$\begin{aligned} u'(x)e^{3x} + 3u(x)e^{3x} - 3u(x)e^{3x} &= 3, \\ u'(x) &= \frac{3}{e^{3x}} = 3e^{-3x}, \\ u(x) &= \int 3e^{-3x}\,dx = -e^{-3x} + C. \end{aligned}$$

Od tod dobimo rezultat

$$y(x) = u(x)e^{3x} = \left(-e^{-3x} + C\right) e^{3x} = \underline{\underline{-1 + Ce^{3x}}}.$$

(b) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$:

Homogeni del:

Najprej poiščimo splošno rešitev homogene enačbe:

$$\begin{aligned} y' + y\cos x &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= -\cos x\, dx, \\ \log y &= -\sin x + c, \\ y &= Ce^{-\sin x}. \end{aligned}$$

Nehomogeni del:

Vzemimo nastavek $y(x) = u(x)e^{-\sin x}$. Sledi $y'(x) = u'(x)e^{-\sin x} - \cos x\, u(x)e^{-\sin x}$ in

$$\begin{aligned} u'(x)e^{-\sin x} - \cos x\, u(x)e^{-\sin x} + u(x)e^{-\sin x}\cos x &= e^{-\sin x}, \\ u'(x) &= \frac{e^{-\sin x}}{e^{-\sin x}} = 1, \\ u(x) &= \int 1\, dx = x + C. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$y(x) = u(x)e^{-\sin x} = (x + C)\, e^{-\sin x} = \underline{\underline{xe^{-\sin x} + Ce^{-\sin x}}}.$$

(c) $y' - y = e^{2x}$, $y(0) = 2$:

Homogeni del:

Splošna rešitev homogene enačbe je:

$$\begin{aligned} y' - y &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= dx, \\ \log y &= x + c, \\ y &= Ce^{x}. \end{aligned}$$

Nehomogeni del:

Sedaj je $y(x) = u(x)e^x$ in $y'(x) = u'(x)e^x + u(x)e^x$. Od tod sledi:

$$\begin{aligned} u'(x)e^x + u(x)e^x - u(x)e^x &= e^{2x}, \\ u'(x) &= \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x, \\ u(x) &= \int e^x\, dx = e^x + C. \end{aligned}$$

Splošna rešitev enačbe je

$$y(x) = u(x)e^x = (e^x + C)\, e^x = e^{2x} + Ce^x.$$

Konstanto C določimo z upoštevanjem začetnega pogoja

$$2 = y(0) = e^0 + Ce^0 = 1 + C.$$

Od tod sledi $C = 1$ in

$$y(x) = \underline{\underline{e^{2x} + e^x}}.$$

(d) $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4,\ y(1) = 8$:

Homogeni del:
Splošna rešitev homogene enačbe je tokrat:

$$\begin{aligned}(x+1)y' - 2y &= 0,\\ \frac{dy}{y} &= \frac{2\,dx}{x+1},\\ \log y &= 2\ln(x+1) + c,\\ y &= C(x+1)^2.\end{aligned}$$

Nehomogeni del:
Vzeli bomo $y(x) = u(x)(x+1)^2$, od koder sledi $y'(x) = u'(x)(x+1)^2 + u(x)2(x+1)$ in

$$\begin{aligned}(x+1)\left(u'(x)(x+1)^2 + u(x)2(x+1)\right) - 2u(x)(x+1)^2 &= (x+1)^4,\\ u'(x) &= \frac{(x+1)^4}{(x+1)^3} = x+1,\\ u(x) &= \int (x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x + C.\end{aligned}$$

Splošna rešitev enačbe je

$$y(x) = u(x)(x+1)^2 = \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)(x+1)^2,$$

konstanta C pa zadošča enakosti

$$8 = y(1) = \left(\frac{1}{2} + 1 + C\right) 4.$$

Sledi $C = \frac{1}{2}$ in

$$y(x) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(x+1)^4}}.$$

$\square$

(3) Padalec skoči iz letala in nato pada pod vplivom sile teže in sile zračnega upora. Hitrost padalca zadošča diferencialni enačbi

$$mv' = mg - \frac{1}{2}\rho A C_d v^2,$$

kjer je m masa padalca, g težni pospešek, ρ gostota zraka, A ploščina čelnega prereza skakalca in C_d koeficient zračnega upora. Izračunaj, kako se spreminja hitrost padalca med padanjem in nato še njegovo končno hitrost.

Rešitev: Gibanje padalca določa drugi Newtonov zakon, ki se v tem primeru glasi

$$mv' = mg - \frac{1}{2}\rho A C_d v^2.$$

Z v smo označili hitrost padalca v navpični smeri, člena na desni pa ustrezata sili teže $F_g = mg$ ter sili zračnega upora $F_{upora} = -\frac{1}{2}\rho A C_d v^2$. Koeficienti, ki nastopajo v enačbi, imajo naslednji pomen:

- m masa padalca,
- ρ gostota zraka,
- A ploščina prereza padalca,
- C_d koeficient zračnega upora,
- g težni pospešek.

Da si malce poenostavimo računanje, uvedimo oznaki $a^2 = \frac{\rho A C_d}{2m}$ in $b^2 = g$. Po deljenju z m se enačba prevede v diferencialno enačbo

$$v' = b^2 - a^2 v^2,$$
$$\frac{dv}{b^2 - a^2 v^2} = dt.$$

Integral racionalne funkcije na levi je enak

$$\int \frac{dv}{b^2 - a^2 v^2} = \frac{1}{2ab} \ln \frac{b + av}{b - av} + C.$$

Z integriranjem tako pridemo do enakosti

$$\frac{1}{2ab} \ln \frac{b + av}{b - av} = t + C.$$

Če upoštevamo, da je na začetku hitrost padalca $v(0) = 0$, dobimo $C = 0$, kar nam da

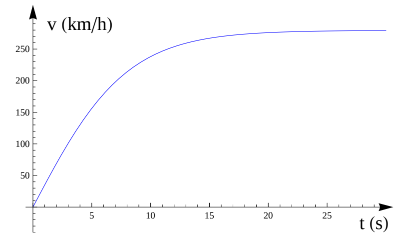
$$\ln \frac{b + av}{b - av} = 2abt.$$

Iz te enačbe lahko sedaj eksplicitno izrazimo $v(t)$. Rešitev je enaka

$$v(t) = \frac{b}{a} \cdot \frac{e^{2abt} - 1}{e^{2abt} + 1} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_d}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{\frac{\rho A C_d g}{2m}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{\rho A C_d g}{2m}}t} + 1}.$$

V limiti dobimo končno hitrost padalca $v_k = \lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_d}}$.

Poglejmo si še primer s konkretnimi številkami. Vzemimo, da ima padalec $80kg$ in da je $\rho = 1.3kg/m^3$, $g = 9.8m/s^2$. Denimo še, da je padalec med padanjem v navpični legi. Potem je $C_d \approx 1$, čelni prerez pa je $A \approx 0.2m^2$. Pri teh podatkih bi bila končna hitrost padalca $v_k \approx 280km/h$, dosegel pa bi jo v približno $20s$, kot kaže spodnji graf.



$\square$