

Izpit iz Osnov matematične analize

5. februar 2015

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Vsi deli nalog so enakovredni.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. [20 točk] Kompleksna števila

(a) Zapišite definicijo absolutne vrednosti kompleksnega števila $z \in \mathbb{C}$ in narišite sliko v kompleksni ravnini.

(b) Zapišite v obliki enačbe naslednji pogoj:

Število z je v kompleksni ravnini bližje številu 1 kot številu i .

(c) Poiščite vsa kompleksna števila, ki zadoščajo zgornjemu pogoju in jih narišite v kompleksni ravnini.

(d) Naj bo podano območje $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ ter preslikavi

$$\varphi: z \rightarrow 2iz \text{ ter } \psi: z \rightarrow 2 + i + z.$$

V kompleksni ravnini skicirajte območja \mathcal{D} , $\varphi(\mathcal{D})$ ter $\psi(\mathcal{D})$.

2. [20 točk] Zaporedja

(a) Kdaj je M zgornja meja zaporedja $(a_n)_n$?

Kdaj je M natančna zgornja meja zaporedja $(a_n)_n$?

(b) Število L je limita zaporedja $(a_n)_n$, če _____

_____.

(c) Ali je vsako navzgor omejeno zaporedje konvergentno? Če da, utemeljite. Če ne, napišite protiprimer.

Ali je vsako konvergentno zaporedje navzgor omejeno? Če da, utemeljite. Če ne, napišite protiprimer.

(d) Če je $(a_n)_n$ konvergentno zaporedje, ali je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentna? Če da, utemeljite. Če ne, napišite protiprimer.

Če je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentna, ali je tudi zaporedje $(a_n)_n$ konvergentno? Če da, utemeljite. Če ne, napišite protiprimer.

3. [10 točk] Funkcije več spremenljivk

(a) Kaj je nivojska krivulja funkcije $f = f(x, y)$ dveh spremenljivk?

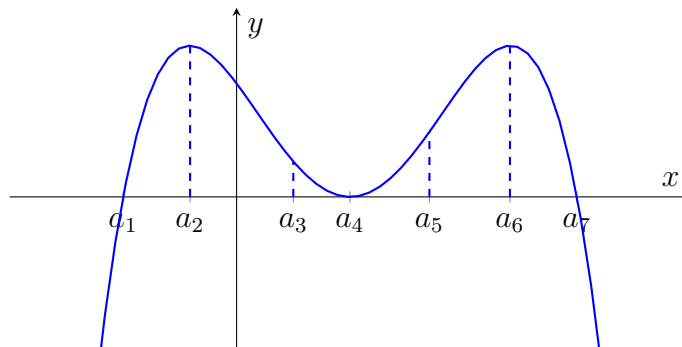
- (b) V kateri smeri funkcijska vrednost funkcije $f = f(x, y)$ najhitreje narašča, če se za malo premaknemo iz točke (a, b) ?

4. [25 točk] Odvod

- (a) Zapišite definicijo odvoda funkcije f v točki a .

- (b) Če v neki točki a velja $f'(a) = 0$ in $f''(a) < 0$, ali je v točki a lokalni ekstrem? Če da, kakšen? Če ne, zapišite primer takšne funkcije.

Naslednja vprašanja se nanašajo na funkcijo f , katere odvod f' ima naslednji graf:



- (c) V vsakega od spodnjih štirih kvadratkov napišite, ali so vrednosti na levi od njega pozitivne ($>$), negativne ($<$), enake 0 ($=$) ali da jih iz grafa odvoda ne moremo razbrati (?):

$$\begin{array}{l} f(a_5) \quad \square \quad 0 \\ f'(a_5) \quad \square \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f''(a_5) \quad \square \quad 0 \\ f''(a_6) \quad \square \quad 0 \end{array}$$

- (d) V katerih izmed točk a_1, a_2, \dots, a_7 ima funkcija f stacionarne točke? _____.

V katerih izmed točk a_1, a_2, \dots, a_7 funkcija f narašča? _____.

- (e) V katerih izmed točk a_1, a_2, \dots, a_7 ima funkcija f lokalni maksimum? _____.

V katerih izmed točk a_1, a_2, \dots, a_7 ima funkcija f lokalni minimum? _____.

5. [25 točk] Integral

(a) Zakaj je nedoločeni integral določen le do konstante natančno?

(b) Zapišite osnovni izrek integralskega računa.

(c) Skicirajte graf kake funkcije $f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, za katero bo veljalo: $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$ je približno -1 , $\int_{-2}^0 f(x)dx$ je približno 0 in $\int_{-1}^1 f(x)dx$ je približno 1 .

(d) Kaj je diferencialna enačba?

(e) Zapišite primer diferencialne enačbe tretjega reda.