Ime in priimek

Osnove matematične analize: prvi računski izpit

19. januar 2021

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Čas pisanja je 60 minut. Dovoljena je uporaba 2 listov A4 formata s formulami. Uporaba elektronskih pripomočkov (kalkulator, telefon) ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji!
Vsako nalogo piši na svojo stran. Če ne rešuješ na izpitno polo, se na vsak list zgoraj podpiši, navedi številko naloge ter naloge skeniraj po vrsti. Hvala!

1. naloga (30 točk)

Za vse $n \in \mathbb{N}$ lahko število $z_n = (1+\sqrt{2}i)^n$ zapišemo v obliki $a_n + b_n\sqrt{2}i$ za neka enolično določena $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$. Torej: $a_n = \mathrm{Re}(z_n)$ in $b_n = \mathrm{Im}(z_n)/\sqrt{2}$.

a) (5 točk) Poišči a_0, b_0, a_1, b_1, a_2 in b_2.

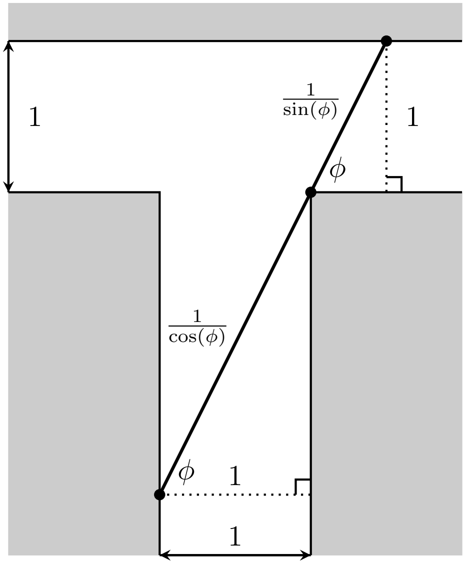
b) (10 točk) Izrazi a_{n+1} in b_{n+1} z a_n in b_n. (Namig: Izrazi z_{n+1} s pomočjo z_n.)

c) (5 točk) Izračunaj $\mathrm{Im}(z_4)$. (Lahko si pomagaš s prejšnjo točko ali izračunaš direktno.)

d) (10 točk) Iz rekurzij za a_{n+1} in b_{n+1} lahko izpeljemo zvezo $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n$. S pomočjo te zveze izračunaj $\mathrm{Re}(z_7)$.

2. naloga (30 točk)

Hodnik širine 1 metra se pravokotno nadaljuje v hodnik širine 1 metra, kot prikazano na sliki. Izračunati želimo, kako dolga sme biti palica, da jo še lahko nesemo okoli vogala.



a) (5 točk) Pomagaj si z zgornjo skico, da zapišeš funkcijo $d\colon (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ spremenljivke ϕ, ki pove maksimalno dolžino palice pri kotu ϕ.

b) (15 točk) Določi in klasificiraj ekstreme funkcije d na $(0, \frac{\pi}{2})$.
Namig: Morda ti prideta prav zveza $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan x$.

c) (10 točk) Največ koliko je lahko dolga palica, da jo še lahko nesemo okrog vogala?

3. naloga (40 točk)

Naj bo

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

a) (20 točk) Izračunaj nedoločena integrala $\int f(x)dx$ in $\int f(x)^2 dx$.
Rešitev : Za izračun $\int f(x)dx$ uvedemo novo spremenljivko (**5 točk**)

$$\begin{aligned} t &= x^2 - 1 \\ dt &= 2x dx \end{aligned}$$

Potem je

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2-1} + C$$

(**3 točke**).
Za izračun $\int f(x)^2 dx$ je potrebno integrand $f(x)^2$ razbiti na parcialne ulomke (**8 točk**):

$$\frac{x^2}{x^2-1} = 1 - \frac{1}{x^2-1} = 1 - \frac{1}{(x-1)(x+1)} = 1 + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

Potem dobimo integral z integriranjem po členih (**4 točke**)

$$\int \frac{x^2}{x^2-1} dx = \int 1 dx + \int \frac{1}{2(x-1)} dx - \int \frac{1}{2(x+1)} dx = x + \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{2}\log(x+1) + C$$

$$= x + \frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + C$$

b) (12 točk) Ali obstaja kateri od posplošenih integralov

$$\int_1^2 f(x)dx \quad \text{ali} \quad \int_1^2 f(x)^2 dx?$$

Če obstaja, ga izračunaj. Odgovor utemelji!
Rešitev : Za prvi integral (**6 točk**) lahko računamo

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \lim_{y \downarrow 1} \int_y^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \lim_{y \downarrow 1} \left(\sqrt{4^2-1} - \sqrt{y^2-1}\right) = \sqrt{3}$$

Za drugi integral (**6 točk**) pa dobimo

$$\lim_{y \downarrow 1} \int_y^2 \frac{x^2}{x^2-1} dx = \lim_{y \downarrow 1} \left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{y-1}{y+1}\right)\right) = \infty$$

c) (8 točk) Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če funkcijo $f(x)$ zavrtimo okrog x-osi na intervalu $x \in [2,3]$.
Rešitev : Izračun volumna vrtenine dobimo z integralom

$$V = \pi \int_2^3 f(x)^2 dx = \pi\left(3 + \frac{1}{2}\log\left(\frac{3-1}{3+1}\right) - 2 - \frac{1}{2}\log\left(\frac{2-1}{2+1}\right)\right) = \pi\left(1 + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= \pi\left(1 + \frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

Če v rezultatih nastopajo koreni, logaritmi itd, jih pusti v taki obliki.