1. popravni kolokvij iz Osnov matematične analize
(Ljubljana, 27. 1. 2016)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`*.*

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Poišči vse rešitve $z \in \mathbb{C}$ enačbe

$$z\overline{z} = z + \overline{z},$$

ki zadoščajo tudi enačbi

$$z^4 + 4 = 0.$$

Rešitev: Rešimo najprej enačbo

$$z^4 = -4 = 4e^{\pi i}$$

kjer -4 zapišemo v polarni obliki s pomočjo $|-4| = 4$ in $\arg(-4) = \pi$. Četrte korene lahko potem izrazimo kot

$$z_k = 4^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i + 2k\pi i}{4}} = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i + \frac{k\pi}{2} i}, \text{ za } k = 0, 1, 2, 3$$

Če to še naprej poračunamo (še lazje je, če si enostavno narišemo), dobimo

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + i \\ z_2 &= -1 + i \\ z_3 &= -1 - i \\ z_4 &= 1 - i \end{aligned}$$

in lahko direktno preverimo, da za z_1 in z_4 velja tudi $z\overline{z} = z + \overline{z}$. Rešitve enačbe $z\overline{z} = z + \overline{z}$ lahko tudi nazorno opišemo, če zapišemo $z = x + iy$ in dobimo

$$x^2 + y^2 = 2x$$

Če to preoblikujemo, dobimo

$$x^2 + y^2 - 2x + 1 = 1$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

iz česar vidimo, da je množica rešitev krožnica s polmerom 1 in središčem v $z_0 = 1$. Tudi na ta način lahko vidimo, da z_1 in z_4 rešita to enačbo, ker ležita na tej krožnici.

2. Zaporedje a_n je definirano z začetnim členom in rekurzivno formulo

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ a_{n+1} &= 5 + \frac{2}{2 - a_n} \end{aligned}$$

za $n \geq 1$.

(a) Izračunaj a_2 in a_3.

(b) Poišči kandidate za limito zaporedja a_n.

(c) Z indukcijo pokaži, da je zaporedje a_n omejeno navzdol s 4, nato pa še, da je zaporedje padajoče. Kaj je limita?

(d) Kaj pa je limita v primeru, da bi za začetni člen vzeli $a_1 = 3$?

Rešitev:

(a) $a_2 = 13/3$, $a_3 = 29/7$.

(b) Rešujemo enačbo

$$a = 5 + \frac{2}{2 - a}$$

Če pomnožimo enačbo z $2 - a$, dobimo kvadratno enačbo z rešitvama $a_1 = 3$ in $a_2 = 4$.

(c) Najprej z indukcijo dokažimo, da je $a_n \geq 4$. Baza indukcija $a_1 = 5 > 4$ je že dana. Indukcijska predpostavka je $a_n \geq 4$. Iz tega sledi

$$2 - a_n \leq -2$$

Če nenačbo delimo z $2 - a_n$, se neenačaj obrne (ker je $2 - a_n$ po indukcijski predpostavki negativen) in dobimo

$$1 \geq \frac{-2}{2 - a_n}$$

Če enačbo še pomnožimo z -1 in prištejemo 5 dobimo

$$4 \leq 5 + \frac{2}{2 - a_n}$$

kar pomeni, da je $a_{n+1} \geq 4$, s čimer smo dokazali indukcijski korak.

Še dokaz, da zaporedje pada: dokazujemo neenačbo $a_{n+1} \leq a_n$. To je ekvivalentno

$$5 + \frac{2}{2 - a_n} \leq a_n$$

Ker že vemo, da je $2 - a_n < 0$, je to ekvivalentno

$$(5 + \frac{2}{2 - a_n})(2 - a_n) \geq a_n(2 - a_n)$$

To neenačbo lahko poenostavimo v

$$(a_n - 3)(a_n - 4) \geq 0$$

Na levi strani je kvadratna funkcija a_n, ki je pozitvna natanko takrat, ko je $a_n \leq 3$ ali $a_n \geq 4$ (vemo pa, da je $a_n \geq 4$). Z dokazom, da je zaporedje omejeno navzdol s 4 in padajoče, je dokazano, da a_n ima limito. Ta je lahko edino 4.

(d) Če je $a_1 = 3$, je tudi $a_2 = 3$ in enako za vse nadaljnje člene. Limita je torej 3.

3. Podjetje bi rado izdelovalo posode valjaste oblike brez pokrova. Kakšno mora biti razmerje med višino posode v in polmerom osnovne ploskve r, da bo da bo pri dani površini S posoda imela največjo možno prostornino V?

Rešitev: Površina valja brez zgornje ploskve je

$$S = \pi r^2 + 2\pi r v,$$

prostornina pa

$$V = \pi r^2 v$$

Volumen moramo zapisati kot funkcijo ene spremenljivke (pri upoštevanju, da je S konstanta), ki jo bomo lahko maksimizirali. Izrazimo lahko v iz formule za S

$$v = \frac{S - \pi r^2}{2\pi r}$$

in to vstavimo v formulo za V. Dobimo

$$V(r) = \frac{\pi r^2(S - \pi r^2)}{2\pi r} = \frac{1}{2}(Sr - \pi r^3)$$

Odvod je

$$V'(r) = \frac{1}{2}(S - 3\pi r^2)$$

Enačba $V'(r) = 0$ ima samo eno pozitivno rešitev

$$r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

Če to vstavimo v formulo za v in poračunamo, dobimo tudi

$$v = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

Torej je optimalno, če vzamemo $v = r$, oz. razmerje $v : r = 1 : 1$.

4. Poišči ortogonalne trajektorije na družino elips

$$\frac{x^2}{3} + y^2 = c$$

Rešitev: Najprej moramo poiskati diferencialno enačbo, ki ima za rešitev družino krivulj

$$\frac{x^2}{3} + y^2 = c$$

To ponavadi najlažje storimo, če iz enačbe izrazimo konstanto (kar imamo že narejeno) in odvajamo po x. Pri tem razumemo y kot funkcijo $y = y(x)$, torej moramo posredno odvajati tam, kjer naletimo na funkcijo y-a. Dobimo

$$\frac{2x}{3} + 2yy' = 0$$

(Lahko za vajo preverite, da je splošna rešitev te enačbe res zgornja družina elips). Da dobimo diferencialno enačbo, ki določa ortogonalne trajektorije na naše elipse, moramo v enačbi y' zamenjati z $-1/y'$. Dobimo

$$\frac{2x}{3} - 2\frac{y}{y'} = 0$$

Če malo obrnemo enačbo, imamo

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x}$$

oziroma

$$\frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{x}$$

Enačbo intergriramo in dobimo

$$\log y = 3 \log x + \log C = \log\left(Cx^3\right)$$

iz česar sledi

$$y = Cx^3$$

Rešitev je torej družina kubnih parabol, ki gre skozi izhodišče $(0, 0)$.