# 1. popravni kolokvij iz Osnov matematične analize

**(Ljubljana, 5. 2. 2015)**

*Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na* `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

$\boxed{\textbf{Vse odgovore dobro utemelji!}}$

1. Poišči vse kompleksne rešitve spodnje enačbe.

$$i\omega^3 - 2\sqrt{3} = 2i$$

*Rešitev*

$$\begin{aligned}
i\omega^3 - 2\sqrt{3} &= 2i \\
-\omega^3 - 2\sqrt{3}i &= -2 \\
-\omega^3 &= -2 + 2\sqrt{3}i \\
\omega^3 &= 2 - 2\sqrt{3}i \\
|2 - 2\sqrt{3}i| &= \sqrt{2^2 + 2^2 * 3} = \sqrt{16} = 4 \\
arg(2 - 2\sqrt{3}i) &= \arctan\frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\arctan(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \\
\omega_k &= \sqrt[3]{4}e^{i(-\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})}
\end{aligned}$$

2. Z uporabo indukcije pokaži, da za vsako od 1 večje naravno število $n$ velja enakost

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

*Rešitev*

*(a) Baza: vstavimo $n = 1$.*

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1^2$$

$$1 = 1$$

*(b) Predpostavimo, da velja za nek $N$. Tedaj je.*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N+1}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{N}(2i-1) + (2(N+1)-1)\\ &= N^2+2N+1 = (N+1)^2\end{aligned}$$

3. Podana je funkcija dveh spremenljivk

$$f(x,y) = \sqrt{x^2-2x+y^2+1}.$$

   (a) Določi njene nivojske krivulje in jih skiciraj za $c = 0, 1$ in 4.

   (b) Določi njene stacionarne točke.

   (c) Določi njen gradient v točki $T(0,1)$.

*Rešitev*

*(a)*

$$\sqrt{x^2-2x+y^2+1} = k^2(x-1)^2+y^2 = k^2$$

*Nivojnice so krožnice s središčem v točki $S(1,0)$.*

*(b)*

$$\begin{aligned}f(x,y) &= \sqrt{(x-1)^2+y^2} = ((x-1)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\\ f_x(x,y) &= \frac{1}{2}((x-1)^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x-2)\\ f_y(x,y) &= \frac{1}{2}((x-1)^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2y)\\ grad(f) &= (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\end{aligned}$$

4. Smerni koeficient tangente na krivuljo je v vsaki točki enak dvakratniku produkta abcise in ordinate te točke. Poišči vse krivulje, ki zadoščajo temu pogoju in nato poišči tisto, ki gre skozi točko $(1, 2e^2)$.

*Rešitev*

$$
\begin{aligned}
y' &= 2xy \\
\frac{dy}{y} &= 2xdx \\
log(y) &= x^2 + log(C) \\
y &= Ce^{x^2} \\
2e^2 &= Ce \\
C &= 2e \\
y &= 2ee^{x^2} = 2e^{x^2+1}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{Vse odgovore dobro utemelji!}}$