· Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

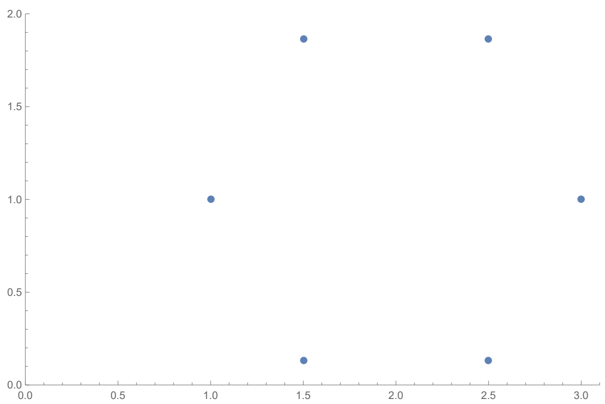
Prvi rok iz OME, 19.01.2020

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk. V oglatih oklepajih $[\cdot]$ je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

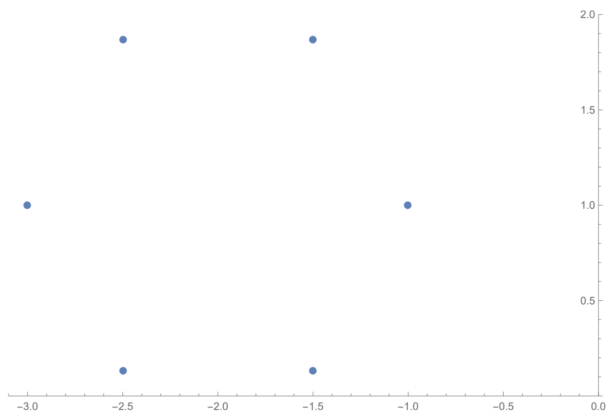
1. **[30 točk]**

(a) Napišite predpis transformacije kompleksne ravnine v kartezičnem ali polarnem zapisu, ki množico $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 1\}$ preslika v množico $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

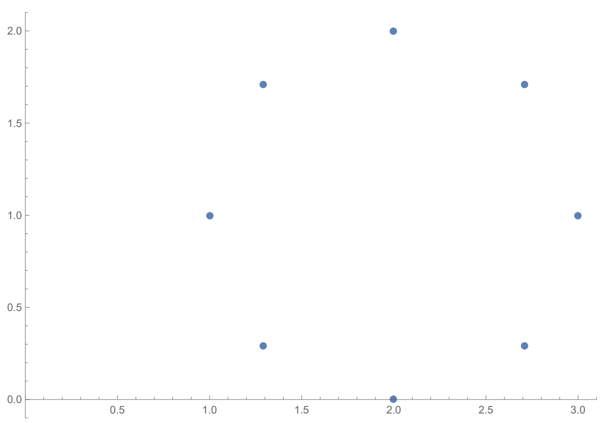
(b) Katera od naslednjih slik predstavlja rešitve enačbe $(z-2-i)^6 = 1$? Odgovor utemeljite.



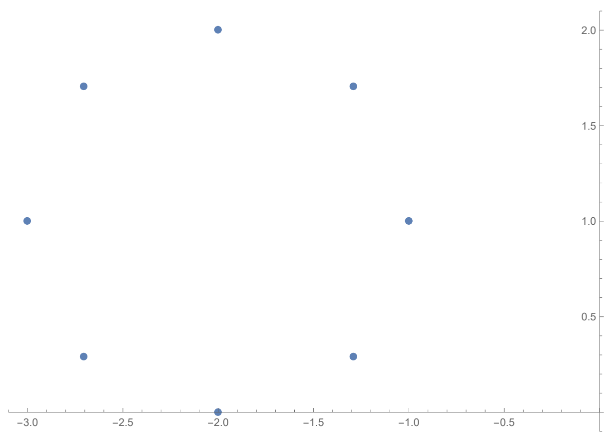
Slika 1



Slika 2



Slika 3



Slika 4

(c) Množico rešitev enačbe iz (1b) zavrtimo okrog izhodišča za kot $\frac{\pi}{3}$. Napišite enačbo, ki ji zadoščajo točke iz zavrtene množice.

2. **[30 točk]**

(a) Opišite, kako bi iskali kandidate za ekstreme neke zvezno odvedljive funkcije $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ z definicijskim območjem $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$.

(b) Vemo, da ima vsaka zvezna funkcija $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$, kjer je $\mathcal{D}_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$, globalni minimum in globalni maksimum. Kako bi ju poiskali, če veste, da funkcija g na $\mathcal{D}_g$ nima stacionarnih točk?

(c) Utemeljite, da ima vsaka zvezna funkcija $f : [0, 1] \to [0, 1]$ fiksno točko, tj. $\alpha \in [0, 1]$, ki zadošča $f(\alpha) = \alpha$.

Namig: Definirajte funkcijo $g : [0, 1] \to [0, 1]$ s predpisom $g(x) = f(x) - x$ in zanjo uporabite izrek o vmesni vrednosti.

3. **[35 točk]** Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija, ki je integrabilna na vsakem intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$.

(a) Določite definicijsko območje funkcije $F(x, y) = \displaystyle\int_y^x f(t)\, dt$.

(b) Naj bo f strogo pozitivna funkcija. Določite množico ničel funkcije F, definirane kot v (3a).

(c) Naj bo $f(t) = t$. Določite nivojnico funkcije F, na kateri leži točka $(2, 0)$.

(d) Izračunajte oba parcialna odvoda $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ in $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$.