· Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

Predrok iz OME, 08.01.2020

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk. V oglatih oklepajih [·] je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

1. **[30 točk]**

(a) **[10]** Navedite eno operacijo na $\mathbb{C}$ in eno transformacijo kompleksne ravnine, za kateri je polarni zapis kompleksnega števila primernejši od kartezičnega. Za obe napišite tudi predpis v polarnem zapisu.

Operacija: potenciranje s predpisom $|z|\, e^{i\mathrm{Arg}(z)} \mapsto |z|^n\, e^{in\mathrm{Arg}(z)}$, kjer je $n \in \mathbb{Z}$.
Transformacija: vrtež za kot φ s predpisom $z \mapsto ze^{i\varphi}$.

- Po 2 točki za navedbo operacije in transformacije, ter po 3 točke za pravilen zapis vsake od njiju v polarnem zapisu.
- Za pravilne operacije štejejo tudi množenje, deljenje, korenjenje.
- Zgolj razteg ni štel za pravilno operacijo, saj je tudi v kartezičnem predpis enako enostaven.
- Za nepopoln zapis operacije ali transformacije izgubite 1 ali 2 točki, odvisno od napake.

(b) **[10]** Izberite realne koeficiente $a_i \in \mathbb{R}$ v algebraični enačbi $a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$ tako, da vsaj ena rešitev te enačbe ne bo realna. Odgovor utemeljite.

Ena od ustreznih rešitev je $0 = (z-i)(z+i)z = (z^2+1)z = z^3+z$. Torej $a_3 = a_1 = 1, a_2 = a_0 = 0$.
Iz razcepa $z^3 + z$ se vidi, da so rešitve enačbe i, $-i$ in 0.

- Zapis enačbe in faktorizacija leve strani na ničle, šteje 10 točk.
- Če ste napisali kvadratno enačbo z realnimi koeficienti in utemeljili (z diskriminanto ali razcepom), da nima realnih ničel, ste dobili 8 točk, saj kvadratna enačba ni 3 stopnje.
- Če ste navedli, da v algebraični enačbi z realnimi koeficienti ničle, ki niso realne, nastopajo v konjugiranih parih, ste dobili 3 točke.
- Za izbor realnih koeficientov brez kakršne koli utemeljitve, zakaj vsaj ena ničla ni realna, niste dobili točk.

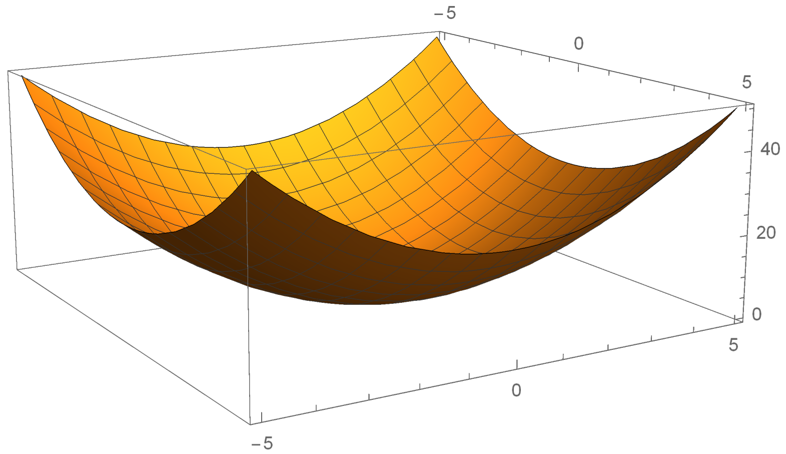
(c) **[10]** Izberite realne koeficiente $a_i \in \mathbb{R}$ v algebraični enačbi $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0 = 0$ stopnje n tako, da se množica rešitev ne spremeni, če vsako rešitev zarotiramo za kot $\frac{2\pi}{n}$ v pozitivni smeri. Odgovor utemeljite.

Ena od usteznih rešitev je $z^n = a$, kjer je $a \in \mathbb{R}$. Torej $a_n = 1$, $a_{n-1} = \ldots = a_1 = 0$, a_0 karkoli.
Vemo, da rešitve enačbe $z^n = a$ tvorijo oglišča pravilnega n-kotnika. Torej rotacija za kot $\frac{2\pi}{n}$ ne spremeni množice rešitev.

- Zapis enačbe $z^n = a$ in utemeljitev, da rešitve tvorijo oglišča pravilnega n-kotnika, je štelo za 10 točk.
- Če ste opazili, da iščete enačbo, ki ima za rešitve oglišča pravilnega n-kotnika, niste je pa znali zapisati, ste dobili 3 točke.

- Tudi enačba $z^n = 0$ in utemeljitev, da je množica ničel zgolj $\{0\}$, ki se pri rotaciji ohranja, je štela 10 točk.
- Enačba $z = 0$ ni ustrezna, saj ni stopnje n.

2. [**30 točk**] Na naslednji sliki je graf zvezno odvedljive funkcije $f : (-5, 5) \times (-5, 5) \to \mathbb{R}$.



Opazimo, da ima funkcija f v definicijskem območju **natanko en** lokalni ekstrem (x_0, y_0).

(a) [**5**] Kaj velja za odvoda $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$?

Oba sta enaka 0.

- Pravilen odgovor je štel 5 točk. Vmesnih točk tu ni bilo.

(b) [**10**] Napišite primer matrike, ki bi glede na podatke lahko bila Hessejeva matrika funkcije f v točki (x_0, y_0). Odgovor utemeljite.

Iz slike vidimo, da gre za lokalni minimum. Primer Hessejeve matrike: $H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Veljati mora namreč $f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2 > 0$ in $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$. Pri nas $2^2 - 1 = 3$ in 2.

- Pravilno napisana matrika je štela 5 točk. 5 točk ste dobili še za utemeljitev, da sta determinanta in drugi parcialni odvod po x oba pozitivna.
- Če niste navedli konkretne matrike, pač pa splošno Hessejevo matriko in pogoje za lokalni minimum, ste dobili 7 točk.
- Če matrika ni zadoščala kakšnemu pogoju za lokalni minimum, niste dobili točk.

(c) [**10**] Naj bo $g : (-5, 5) \times (-5, 5) \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija. Razložite, kako bi iskali kandidate za maksimalne in minimalne vrednosti funkcije f nad krivuljo, določeno z enačbo $g(x, y) = 6$.

Tvorili bi Lagrangeovo funkcijo $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - 6)$ in rešili sistem $L_x = L_y = L_\lambda = 0$.

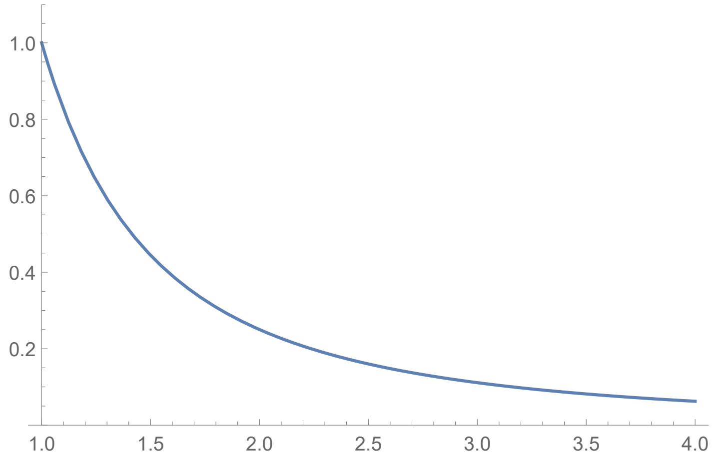
- Pravilno zapisana Lagrangeova funkcija 5 točk. Razlaga, da je potrebno rešiti sistem še 5 točk.
- Če ste namesto $g(x, y) - 6$ za vez upoštevali $g(x, y)$, ste izgubili 3 točke.

(d) [**5**] Ali obstaja funkcija g v prejšnji točki, za katero bo kandidatov neskončno mnogo? Odgovor utemeljite.

Obstaja. Npr. funkcija f. Potem iščemo namreč ekstreme nad nivojnico, na kateri ima f po defiiciji konstantno vrednost.

- Navedba funkcije f in razlaga z nivojnicami, je štel kot pravilna rešitev za 5 točk.
- Za utemeljitev, da je potrebno poiskati funkcijo, ki gre skozi neskončno točk nivojnice pri maksimalni ali minimalni vrednosti f, ste dobili 3 točke.

3. **[35 točk]** Na naslednji sliki je graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$.



(a) **[8]** Izračunajte določeni integral $I_n := \int_1^n f(x)\,dx$ in $\lim_{n\to\infty} I_{kn}$.

$I_n = \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = -\frac{1}{n} + 1$. Sledi $\lim_{n\to\infty} I_{kn} = \lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{kn} + 1) = 1$.

- Pravilno izračunan integral je štel 5 točk. Pravilno izračunana limita še 5 točk. (Pri tej nalogi ste lahko dobili 2 točki bonusa, saj je pomotoma pisalo, da je vredna 8 točk in ne 10).
- Za napačen predznak pri vstavitvi spodnje meje integrala ste izgubili 1 točko. Če niste napisali, kaj je I_{kn}, temveč zgolj, da je limita 1, ste izgubili 2 točki.
- Če ste narobe pointegrirali funkcijo x^{-2}, niste dobili točk. Razen v primeru, ko ste samo konstanto zgrešili, npr. $\frac{1}{2x}$. V takem primeru ste izgubili 2 točki za izračun I_n.
- Če ste narobe vstavili kn iz indeksa izraza I_{kn}, ste izgubili 2 točki.

(b) **[10]** Prerišite skico krivulje (skica ne rabi biti zelo natančna) in vrišite pravokotnike, ki ustrezajo Riemannovi vsoti funkcije $f(x)$ na intervalu $[1,4]$ pri izbiri delilnih točk $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ in vmesnih točk $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 4$.

Pravilna skica so vrisani trije pravokotniki pod grafom funckije. Prvi na intervalu $[1,2]$ in višino $f(2) = \frac{1}{2^2}$, drugi na intervalu $[2,3]$ in višino $f(3) = \frac{1}{2^3}$ in tretji na intervalu $[3,4]$ in višino $f(4) = \frac{1}{4^2}$.

- Če ste vrisali pravokotnike z višinami $f(1)$, $f(2)$ in $f(3)$, potem ste dobili 5 točk.
- Če ste vrisali pravokotnike z višinami $f(1.5)$, $f(2.5)$ in $f(3.5)$, potem ste dobili 3 točke.

(c) **[10]** Napišite Riemannovo vsoto R_n funkcije $f(x)$ pri izbiri delilnih točk $x_0 = 1, x_1 = 2, \ldots, x_{n-1} = n$ intervala $[1,n]$ in vmesnih točk $c_1 = 2, c_2 = 3, \ldots, c_{n-1} = n$. Če sklepate iz točke (3b), kaj lahko poveste o velikosti R_n v primerjavi z I_n?

Po definiciji velja

$$R_n = f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

R_n je manjši od I_n.

- Pravilno zapisan izraz R_n je štel 8 točk. Sklep, da je R_n manjši od I_n pa 2 točki.
- Če ste napisali samo prvo enakost, ste dobili 5 točk. Če ste vstavili številke v to enakost ali opazili, da je to enako desni strani druge enakosti, ste dobili še 3 točke.
- Če ste samo napisali definicijo $R_n = \sum_{k=1}^n f(c_k)\delta_k$ (in ne $R_n = \sum_{k=1}^n f(x_n)\delta_n$), ste dobili 3 točke.

(d) **[7]** Utemeljite, da je vrsta $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}$ konvergentna.

Vrsta $\sum_{k=k_0}^{\infty} C\frac{1}{k^2}$ je konvergentna natanko tedaj, ko je vrsta $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergentna. Velja, da je R_n naraščajoče zaporedje, dominirano z zaporedjem I_n, ki je tudi naraščajoče in ima limito 1. Po izreku o konvergenci monotonih zaporedij, R_n konvergira.

- Vmesnih točk tu glede na oddane izdelke ni bilo. S kvocientnim kriterijom se tega ne da utemeljiti, tako da tu niste dobili točk.
- Pri tem delu ste lahko dobili dodatne 3 točke.