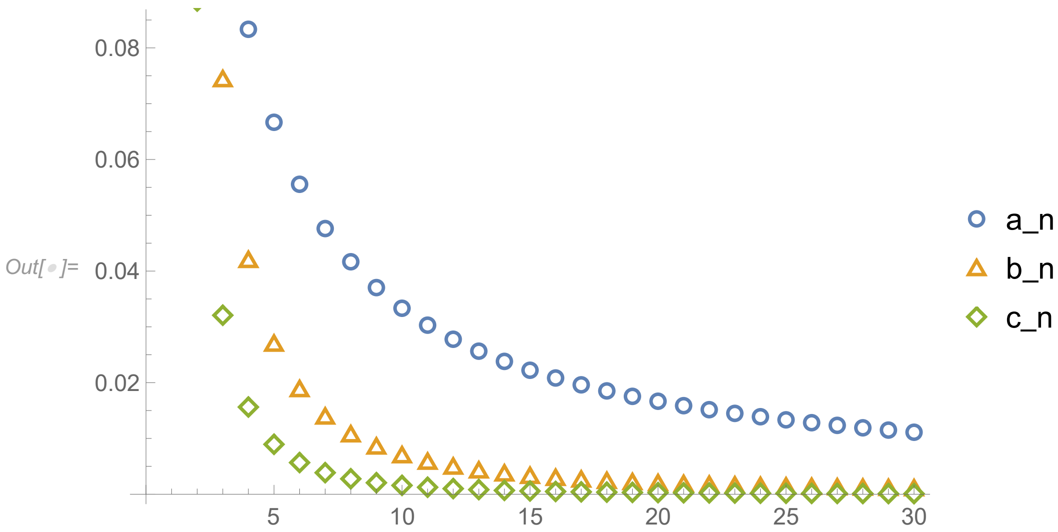
Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

Izredni rok iz OME, 02.07.2021

- Čas pisanja: **45 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk. V oglatih oklepajih $[\cdot]$ je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

1. [**30 točk**] Na naslednji sliki je prvih 30 členov treh zaporedij.



Izgled zaporedij tudi v nadaljevanju sledi tej obliki, tj. zaporedje a_n je nad zaporedjem b_n, to nad c_n, vsa zaporedja so padajoča in nenegativna.

(a) Naj velja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Koliko je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$? Ali je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, b_n$ konvergentna?

Rešitev. Ker je $a_n \geq b_n \geq 0$ in velja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, je po izreku o sendviču $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Zaporedje $(-1)^n\, b_n$ je alternirajoče, absolutno padajoče z limito 0, zato po Leibnizovem kriteriju vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, b_n$ konvergira.

(b) Naj bo vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentna. Kaj lahko o konvergenci/divergenci sklepaš o vrstah $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$?

Rešitev. Ker je $a_n \geq b_n \geq c_n \geq 0$, iz divergence vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ lahko sklepamo na divergenco vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. O vrsti $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ pa ne moremo sklepati.

(c) Naj bo vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pa konvergentna. Tvorimo novo zaporedje d_n, ki je sestavljeno iz prvih 30 členov zaporedja c_n, sledi 30 členov zaporedja b_n, nato pa sledijo členi zaporedja a_n. Kaj lahko poveš o konvergenci/divergenci vrste $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$?

Rešitev. Konvergenca vrste je po definiciji ekvivalentna konvergenci zaporedja $S_m := \sum_{n=1}^{m} d_n$ delnih vsot vrste. Konvergenca zaporedja S_m pa ni odvisna od katerih koli končno mnogo členov zaporedja d_n. Torej je konvergenca vrste $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ ekvivalentna konvergenci vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, divergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$.

2. **[30 točk]** Naj bo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk. Tabeliranih imamo nekaj vrednosti funkcije g in njenih parcialnih odvodov:

(x,y)	$g(x,y)$	$g_x(x,y)$	$g_y(x,y)$	$g_{xx}(x,y)$	$g_{xy}(x,y)$	$g_{yy}(x,y)$
$(-2,0)$	3	0	1	2	1	1
$(-1,0)$	1	-1	0	-1	2	-1
$(\frac{2}{3},0)$	4	0	0	2	1	1
$(3,0)$	5	1	0	2	1	1
$(-2,1)$	2	0	0	-3	0	1
$(-1,1)$	-7	2	0	2	1	1
$(\frac{2}{3},1)$	-1	0	0	-1	1	-2
$(3,1)$	3	0	1	-1	-2	1

(a) Izmed točk v zgornji tabeli navedite tiste, ki so stacionarne točke funkcije g.

Rešitev. Stacionarna točka P zadošča pogojema $g_x(P) = g_y(P) = 0$. Torej so stacionarne točke g: $\left(\frac{2}{3},0\right)$, $(-2,1)$, $\left(\frac{2}{3},1\right)$.

(b) Izmed točk v zgornji tabeli navedite tiste, ki so lokalni ekstremi funkcije g in jih klasificirajte.

Rešitev. Točka P je lokalni ekstrem funkcije g, če je stacionarna in je Hessejeva matrika $H_g(P)$ definitna, tj. $g_{xx}(P)g_{yy}(P) - g_{xy}^2(P) > 0$. Torej so kandidati za lokalne ekstreme le stacionarne točke.

Velja

$$g_{xx}\left(\frac{2}{3},0\right) g_{yy}\left(\frac{2}{3},0\right) - g_{xy}^2\left(\frac{2}{3},0\right) = 2 - 1 = 1.$$

Ker je še $g_{xx}\left(\frac{2}{3},0\right) > 0$, je točka $\left(\frac{2}{3},0\right)$ lokalni minimum funkcije g.

Velja

$$g_{xx}(-2,1)\, g_{yy}(-2,1) - g_{xy}^2(-2,1) = -3 - 0 = -3.$$

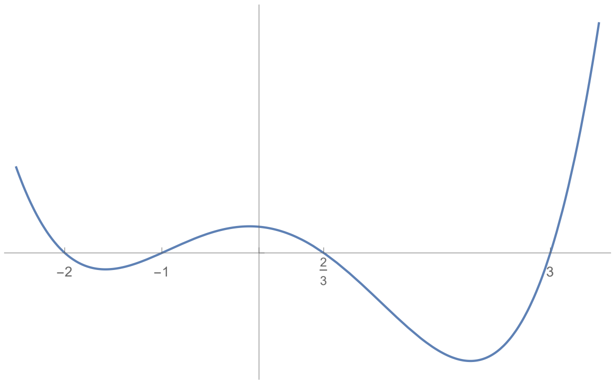
Torej $(-2,1)$ ni lokalni ekstrem funkcije g.

Velja

$$g_{xx}\left(\frac{2}{3},1\right) g_{yy}\left(\frac{2}{3},1\right) - g_{xy}^2\left(\frac{2}{3},1\right) = 2 - 1 = 1.$$

Ker je še $g_{xx}\left(\frac{2}{3},1\right) < 0$, je točka $\left(\frac{2}{3},1\right)$ lokalni maksimum funkcije g.

(c) Na naslednji sliki je graf funkcije $f : [-2.5, 3.5] \to \mathbb{R}$.

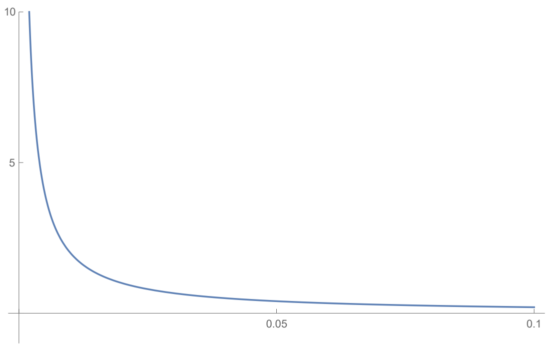


Določite vezane ekstreme funkcije g na pasu $[-2.5, 3.5] \times \mathbb{R}$ pri vezi $h(x,y) = 0$, kjer je $h(x,y) = (f(x))^2 + (y-1)^2$.

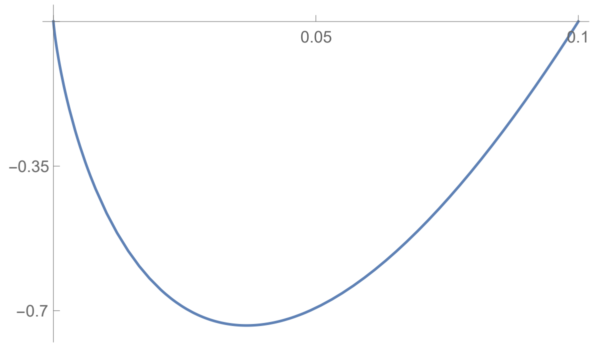
Nasvet: Premislite, katere točke zadoščajo vezi $h(x,y) = 0$.

Rešitev. Enakost $h(x,y) = 0$ lahko velja le, če je $f(x)^2 = (y-1)^2 = 0$. Torej mora biti $f(x) = 0$ in $y = 1$. Iz grafa funkcije f vidimo, da mora biti $x \in \left\{-2,-1,\frac{2}{3},3\right\}$. Torej so kandidati za vezane ekstreme točke $(-2,1), (-1,1), \left(\frac{2}{3},1\right), (3,1)$. Med temi pa je minimum v točki $(-1,1)$, tj. -7, maksimum pa v točki $(3,1)$, tj. 3.

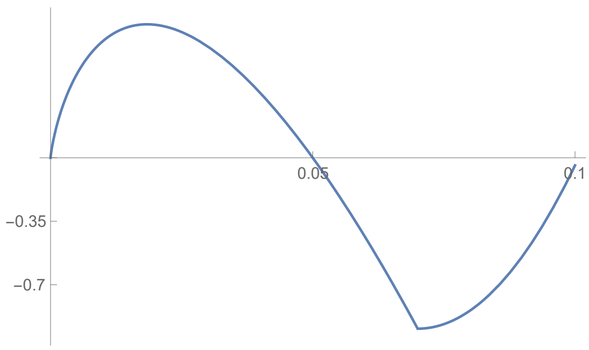
3. **[40 točk]** Na zgornjih slikah so narisani grafi nekaterih funkcij. Za vsako od naslednjih trditev



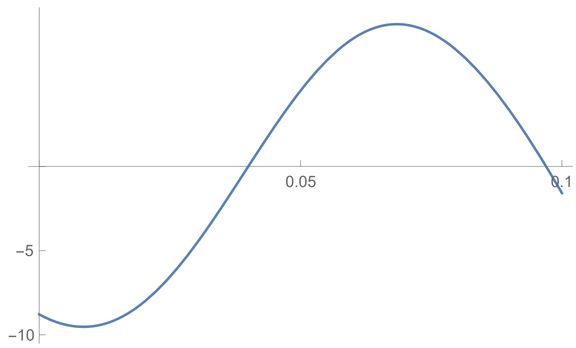
Slika 1



Slika 2



Slika 3



Slika 4

je ustrezna vsaj ena od zgornjih slik. Izberite vse ustrezne slike, ki zadoščajo posamezni od naslednjih trditev in **utemeljite** svojo odločitev tako, da navedete lastnost, na podlagi katere ste se odločili.

(a) Določeni integral $\int_0^{0.1} f(x)\, dx$ funkcije z grafom, ki ga predstavlja slika, obstaja.

Rešitev. Ustrezne so slike 2,3 in 4, saj so ploščine pod grafi funkcij končne. Na sliki 1 funkcija v točki 0 nima desne limite, torej določeni integral ne obstaja.

(b) Drugi odvod funkcije z grafom, ki ga predstavlja slika, ima vsaj eno ničlo na intervalu $(0, 0.1)$.

Rešitev. Ustrezna je slika 4, saj se graf zvezno spremeni iz konveksnega v konkavnega. Slika 3 ni ustrezna, saj niti prvi odvod v točki prehoda ne obstaja.

(c) Prvi odvod funkcije z grafom, ki ga predstavlja slika, ne obstaja na celem intervalu $(0, 0.1)$.

Rešitev. Ustrezna je slika 3, saj v točki $x \approx 0.07$ levi in desni odvod nista enaka.

(d) Prvi odvod funkcije z grafom, ki ga predstavlja slika, ni nikjer pozitiven na intervalu $(0, 0.1)$.

Rešitev. Ustrezna je slika 1, saj je funkcija ves čas padajoča.