Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: ____________________

# 2. Izpit iz OME
# 7. februar 2019

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Vsi deli nalog so enakovredni.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedana.

1. [**15 točk**] **Kompleksna števila**

(a) V polarnem zapisu zapišite vsaj tri kompleksna števila $z$ z lastnostjo $|2 \cdot z| = 1$.

Veljati mora $|z| = 1/2$. Temu zadošča vsak $z$ iz kompleksne krožnice s središčem v izhodišču in polmerom $1/2$. Torej $z = 1/2e^{i\varphi}$, kjer je $\varphi \in [0, 2\pi)$. Npr. $z_1 = 1/2$, $z_2 = -1/2$, $z_3 = 1/2(1/2 + i\sqrt{3}/2) = 1/4 + i\sqrt{3}/4$.

(b) Koliko realnih in koliko kompleksnih rešitev ima enačba $(z^7 - 8)(z^3 + 8) = 0$?

- Enačba ima $7 + 3 = 10$ kompleksnih rešitev.
- Rešitve enačbe $z^7 = 8$ so oblike $\sqrt[7]{8} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{7}}$ za $k = 0, \ldots, 6$. Realni bi bili lahko samo rešitvi pri kotu $0$ in $\pi$. Kot $0$ dobimo pri $k = 0$, kota $\pi$ pa ne moremo dobiti, saj enačba $1 = 2k/7$ nima celoštevilskih rešitev.
- Rešitve enačbe $z^3 = -8$ so oblike $\sqrt[3]{8} \cdot e^{i(\pi + \frac{2k\pi}{3})}$ za $k = -1, 0, 1$. Realni bi bili lahko samo rešitvi pri kotu $0$ in $\pi$. Kot $\pi$ dobimo pri $k = 0$, kota $\pi$ pa ne moremo dobiti, saj enačba $0 = 1 + \frac{2k}{3}$ nima celoštevilskih rešitev.

(c) Poiščite kakšno kompleksno funkcijo, ki slika $0 \mapsto 1$ ter $1 \mapsto 1 + i$.

Ker imamo dva pogoja, potrebujemo funkcijo z dvema parametroma, ki ju moramo določiti. Najenostavnejša taka funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je kar linearna funkcija, tj. $f(z) = az + b$. Veljati mora $1 = f(0) = b$ in $1 + i = f(1) = a + b$. Od tod sledi še $1 + i - b = 1 + i - 1 = i = a$. Torej je $f(z) = iz + 1$.

2. **[10 točk] Zaporedja in vrste**

(a) Kdaj je vrsta konvergira?

Vrsta $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ po definciji konvergira natanko tedaj, ko zaporedje $\{S_m\}_m$ njenih delnih vsot $S_m = \sum_{n=n_0}^{m} a_n$, kjer je $m \geq n_0$, konvergira.

(b) Podajte primer kakšnega nekonstantnega konvergentnega zaporedja z limito 2.

$a_n = 2 + \frac{1}{n}$.

Podajte primer kakšnega omejenega divergentnega zaporedja s spodnjo mejo 2.

Ustrezni sta npr. zaporedji $a_n = \begin{cases} 2, & \text{za sode } n, \\ 3, & \text{za lihe } n. \end{cases}$ in. $b_n = 3 + \sin n$.

3. **[15 točk] Funkcije**

(a) Skicirajte graf poljubne funkcije definirane na $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, za katero velja

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = -1, \quad \lim_{x \searrow 1} f(x) = -2, \quad \lim_{x \nearrow -1} f(x) = 1, \quad \lim_{x \searrow -1} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Ustrezna funkcija je npr.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < -1, \\ 2, & -1 < x < 0, \\ -1, & 0 \leq x < 1, \\ -2, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & 2 \leq x. \end{cases}$$

(b) Za zvezno funkcijo $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ naj velja $f(-1) = 3$ in $f(1) = -1$. Če sta $-1$ ter 1 začetna približka iskanja ničle funkcije $f$ na $[-1, 1]$ po sekantni metodi, kateri bo naslednji približek?

Sekanta čez točki $(-1, 3), (1, -1)$ ima enačbo $\ell(x) = 3 \cdot \frac{x-1}{-2} - \frac{x+1}{2}$. Naslednji približek je presečišče te sekante z $x$-osjo, tj.

$$0 = \ell(x_n) = 3 \cdot \frac{x_n - 1}{-2} - \frac{x_n + 1}{2},$$

oz. $x_n = 1/2$.

(c) Poiščite kakšno elementarno funkcijo dveh spremenjivk, katere definicijsko območje je $[1, \infty) \times [0, \infty)$.

Primer take funkcije je $f(x, y) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{y}$.

4. **[30 točk] Odvod**

(a) Zapišite definicijo gradienta funkcije dveh spremenljivk.

Gradient $\operatorname{grad} f(a,b)$ v točki $(a,b)$ funkcije $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ je enak

$$\operatorname{grad} f(a,b) = (f_x(a,b), f_y(a,b)).$$

(b) Poiščite kakšno funkcijo dveh spremenljivk, katere graidient v točki $(1,1)$ je $(\pi,-2)$.

Imamo dva pogoja, ki jima moramo zadostiti, zato potrebujemo funkcijo z dvema parametroma. Najenostavnejša je linearna funkcija $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=ax+by$. Veljati mora $\pi = f_x(1,1) = a$ in $-2 = f_y(1,1) = b$. Torej je $f(x,y) = \pi x - 2y$.

(c) Kako sta povezana gradient funkcije $f$ ter nivojnice funkcije $f$?

Gradient $\operatorname{grad} f(a,b)$ v točki $(a,b)$ je pravokoten na nivojnico $\mathcal{N}$ funkcije $f$ skozi točko $(a,b)$, tj. $\mathcal{N} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon f(x,y)=f(a,b)\}$.

(d) Zapišite definicijo Taylorjeve vrste funkcije ene spremenljivke v točki $a$.

Taylorjeva vrsta neskončnokrat odvedljive funkcije $f$ v točki $a$ je

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots .$$

(e) Zapišite Taylorjevo vrsto funkcije $(x-1)e^x$ okoli $a=0$.

Izračunajmo nekaj odvodov funkcije $f(x) = (x-1)e^x$.

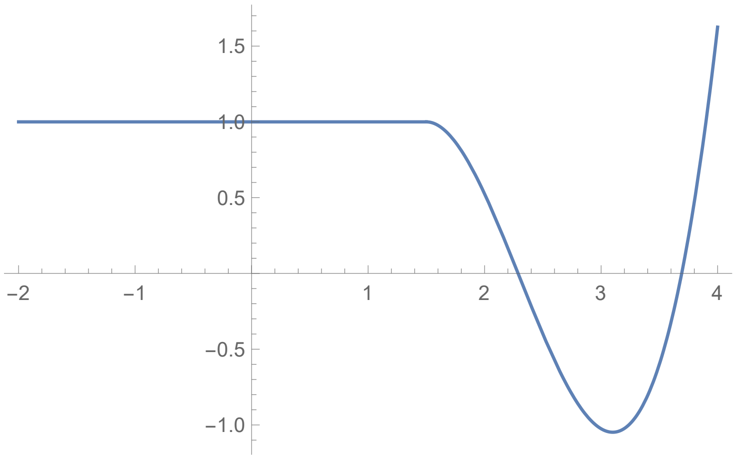
$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + (x-1)e^x = xe^x, \\ f''(x) &= e^x + xe^x = (x+1)e^x, \\ f^{(3)}(x) &= e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x. \end{aligned}$$

Opazimo $f^{(n)}(x) = (x+(n-1))e^x$. (Kar lahko dokažemo z indukcijo.) Torej je $f^{(n)}(0) = n-1$. Sledi

$$(x-1)e^x = -1 + \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \cdots + \frac{n-1}{n!}\cdot x^n + \cdots .$$

(f) Skicirajte graf kakšne dvakrat zvezno odvedljive funkcije $f$, za katero velja $f(0) > 0, f'(1) = f'(-2) = 0, f''(2) < 0, f(3) < 0, f'(4) > 0$. Kolikšno je najmanjše možno število prevojev take funkcije?

(a) Ena od ustreznih slik je naslednja:




Ta graf ima natanko en prevoj, tj. prehod iz konkavnosti v konveksnost (pri $x \approx 2.2$). To je tudi najmanjše možno število prevojev funkcije z lastnostmi iz naloge. Obstajati mora $x_0 \in (0,3)$, tako da je $f'(x_0) < 0$, saj bi bilo v nasprotnem veljalo $0 < f(0) \leq f(3)$, kar je protislovje. Ker je $f'(4) > 0$, mora obstajati $x_1 \in (x_0, 4)$, tako da je $f''(x_1) > 0$, saj bi v nasprotnem veljalo $0 > f'(x_0) \geq f'(4)$, kar je protislovje. Ker je še $f''(2) < 0$, mora obstajati $x_2$, kjer $f''$ spremeni predznak oz. je $x_2$ prevoj.

5. **[30 točk] Integral**

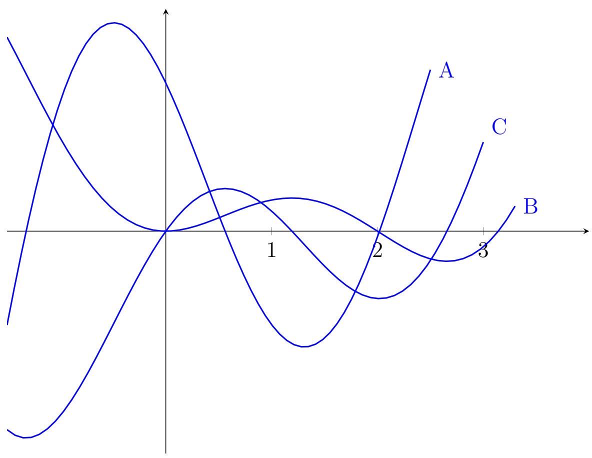
(a) Zapišite definicijo povprečne vrednosti funkcije $f$ na intervalu $[a, b]$.

Povprečna vrednost $\mu$ funkcije $f$ na intervalu $[a, b]$ je enaka $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

(b) Naj bo $f(x) = \int_0^x (t^3 - t)dt$. Poiščite stacionarne točke funkcije $f$.

Po osnovnem izreku integralskega računa je $f'(x) = x^3 - x$. Stacionarne točke $f$ so torej ničle polinoma $x^3 - x$, tj. $0, 1, -1$.

(c) Na spodnji sliki so narisani grafi funkcij $y = f(x)$, $y = f'(x)$ in $y = f''(x)$. Zapišite, kateri od grafov A, B, C predstavlja katero od funkcij $f$, $f'$, $f''$:




Graf funkcije $y = f(x)$ je graf __________.

Graf funkcije $y = f'(x)$ je graf __________.

Graf funkcije $y = f''(x)$ je graf __________.

Če si ogledamo lokalni maksimum grafa A, opazimo, da nobeden od grafov B in C tam nima ničle. Torej je lahko A samo $f''$. Funkcija $f'$ je nedoločen integral funkcije A. Kjer ima A ničlo, mora imeti $f'$ ekstrem. To pa je že pri prvi ničli A res samo za C. Torej je $f'$ lahko samo C. $f$ je tako B.

(d) Izmed omenjenih treh funkcij iz prejšnje točke poiščite poiščite tisto, za katero je njen določeni integral na intervalu $[1, 2]$ največji.

$\int_1^2 f(x)dx$ je predznačena ploščina (tj. ploščine med grafom in $x$-osjo nad $x$-osjo imajo predznak $+$, ploščine med grafom in $x$-osjo pod $x$-osjo imajo predznak $-$) funkcije $f$ na intervalu $[1, 2]$. Torej primerjamo predznačene ploščine pod grafi A, B, C. Največjo predznačeno ploščino ima B.

(e) Naj bo $f$ soda funkcija, za katero velja $\int_0^2 f(x)dx = 1$. Izračunajte $\int_{-2}^2 (2f(x)+1)dx$.

Velja

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} (2f(x) + 1)dx &= 2 \cdot \int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_{-2}^{2} 1dx \\ &= 2 \cdot \left( \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx \right) + 4 \\ &= 2 \cdot 2 + 4 = 8,\end{aligned}$$

pri čemer smo v tretji enakosti upoštevali, da je $f$ soda funkcija in zato za vsak pozitiven $x > 0$ velja $\int_0^x f(t)dt = \int_{-x}^0 f(t)dt$.

(f) Podajte kakšni funkciji $f_1, f_2$, za kateri velja $\int_0^\infty f_1(x)dx < \infty$ ter $\int_0^\infty f_2(x)dx = \infty$.

Posplošen integral funkcije $f : [0, \infty)$ je definiran kot

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x)dx.$$

Za $f_1(x) = \frac{1}{x^2+1}$ velja

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{t\to\infty} [\arctan x]_0^t = \pi/2.$$

Za $f_2(x) = \frac{1}{x+1}$ velja

$$\int_0^\infty \frac{1}{x+1}dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{x+1}dx = \lim_{t\to\infty} [\log(x+1)]_0^t = \infty.$$

Za $f_1$ bi lahko vzeli tudi $\frac{1}{(x+1)^2}$ in dobili

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2}dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{(x+1)^2}dx = \lim_{t\to\infty} [-(x+1)^{-1}]_0^t = 1.$$

Funkcije $f(x) = \frac{1}{x^k}$ imajo singularnost v točki $x = 0$, tako da bi morali posplošen integral računati z limitama na obeh straneh, tj. pri $x = 0$ in v neskončnosti. Zato raje naredimo premik $x \mapsto x + 1$ in se temu izognemo.