· Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

Drugi rok iz OME, **02.02.2021**

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk. V oglatih oklepajih [·] je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

1. [**40 točk**] V tej nalogi naj bo S **četrta neničelna** cifra vaše vpisne številke, šteto od leve proti desni.

(a) Napišite primer zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitivnih števil, tako da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{S+1}$ divergira, alternirajoča vrsta $\sum_{n=1^{\infty}} (-1)^n a_n^{S+1}$ pa konvergira.

(b) Naj bo $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ vrsta iz samih pozitivnih členov, tako da velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Ali je možno, da s spremembami členov a_{2n} (tj. členov s sodimi indeksi), vrsta postane konvergentna?

(c) Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje realnih števil, ki zadošča $a_n \in [0,1]$ in $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2021}$.

i. Napišite ali narišite primer funkcije (ne nujno zvezne) $f : [0,S) \to \mathbb{R}$, za katero velja $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = S$ in $\lim_{x\uparrow S} f(x) = \infty$.

ii. Ali obstaja zvezna funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, ki zadošča $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \infty$?

2. [**30 točk**] V tej nalogi naj bo T **tretja neničelna** cifra vaše vpisne številke, šteto od desne proti levi.

(a) Napišite primer funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dveh spremenljivk, ki v točki $(1,T)$ najhitreje narašča v smeri $(2,1)$.

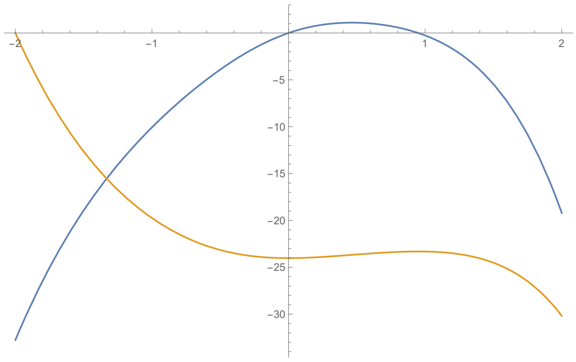
(b) Napišite primer funkcije $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dveh spremenljivk, ki ima v točki $(1,T)$ lokalni minimum.

Namig: Pomagate si lahko s Taylorjevim polinomom stopnje 2 funkcije g v točki (x_0, y_0):

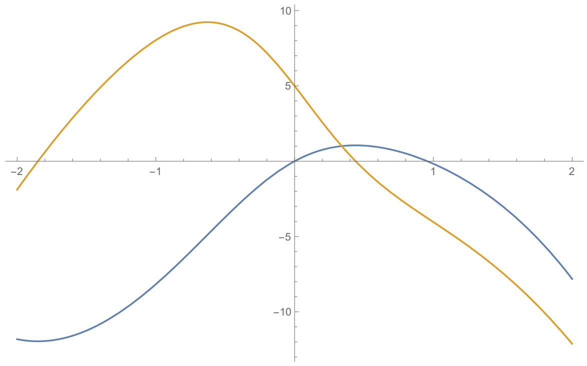
$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= g(x_0,y_0) + g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}g_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + g_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}g_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2. \end{aligned}$$

(c) Naj bo $\mathcal{C}$ krivulja, določena z enačbo $h(x,y) = 0$. Denimo, da je točka $(1,T)$ ekstrem vaše funkcije f iz (2a) nad krivuljo $\mathcal{C}$. Določite smer tangente na $\mathcal{C}$ v točki $(1,T)$.

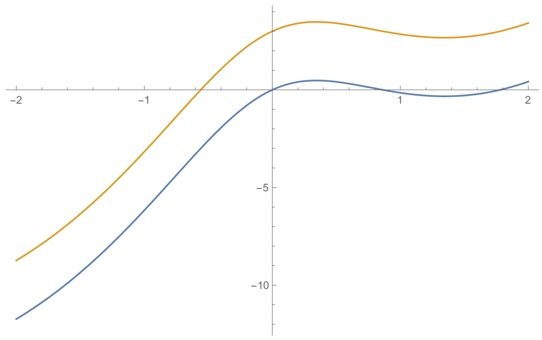
3. **[30 točk]**



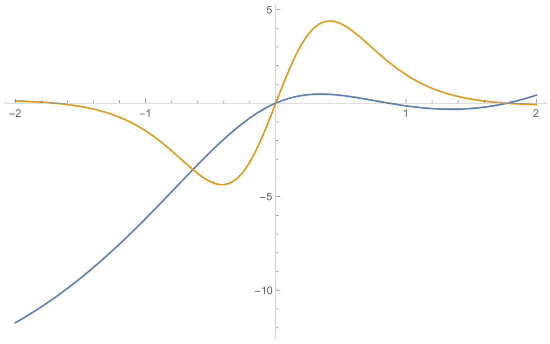
Slika 1



Slika 2



Slika 3



Slika 4

Za vsako od naslednjih trditev je ustrezna natanko ena od zgornjih slik (za vsako druga slika). Izberite ustrezno sliko in **utemeljite** svojo odločitev tako, da poiščete ustrezno lastnost, ki jo slika ima in jo ostale nimajo.

(a) Na sliki sta grafa dveh nedoločenih integralov neke funkcije $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$.

(b) Na sliki sta grafa funkcije $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ in njenega določenega integrala $F(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} f(t)\, dt$.

(c) Na sliki je z **modro** barvo narisan graf funkcije $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, z oranžno pa njen odvod.