Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

Tretji teoretični izpit iz OME, 07.09.2021

- Čas pisanja: **45 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk. V oglatih oklepajih [·] je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

---

1. Izberite si neko **strogo** naraščajoče navzgor omejeno zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) [**8**] Ali zaporedje a_n konvergira? Odgovor utemeljite. Če je odgovor da, določite še $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(b) [**8**] Naj bo zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definirano kot $b_n = a_{n+1} - a_n$. Izračunajte n-to delno vsoto S_n vrste $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

(c) [**10**] Ali je vrsta $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ iz točke (1b) konvergentna? Odgovor utemeljite. Če je odgovor da, določite še vsoto vrste.

(d) [**8**] Ali je odgovor na vprašanje (1c) odvisen od izbire zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$? Če da, potem poiščite zaporedje $\{\tilde{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pri katerem je odgovor drugačen, sicer pa utemeljite, zakaj se odgovor ne spremeni.

---

2. Rešite naslednje naloge:

(a) Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **soda nekonstantna** zvezno odvedljiva funkcija.

i. [**10**] Skicirajte grafa neke funkcije f z zgornjimi lastnostmi in njenega odvoda f'.

ii. [**8**] Kakšna je zveza med $f'(x)$ in $f'(-x)$?

(b) Naj bo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija, ki zadošča $g(x) < 0 < g'(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

i. [**3**] Katero lastnost ima funkcija g, ker zadošča pogoju $0 < g'(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$?

ii. [**3**] Kje v $\mathbb{R}^2$ leži graf funkcije g, ker ta zadošča pogoju $g(x) < 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$?

iii. [**5**] Skicirajte graf neke funkcije g z zgornjimi lastnostmi.

iv. [**7**] Preverite, da je funkcija $h(x) = e^{-x} g(x)$ naraščajoča.

---

3. Naj bo dana funkcija $g(x, y) = x^2 + \int_0^y \sqrt{1 - t^2}\, \mathrm{d}t$.

(a) [**8**] Določite definicijsko območje D_g funkcije g.

(b) [**8**] Utemeljite, da je $\dfrac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \sqrt{1 - y^2}$.

(c) [**14**] Določite vse **kandidate** za vezane ekstreme funkcije g na krožnici $x^2 + y^2 = 1$. (Ni potrebno klasificirati, kateri izmed kandidatov so res vezani ekstremi.)

Namig. Če točke (3b) ne znate rešiti, lahko vseeno rešite (3c) z upoštevanjem, kaj je $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$.