Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

Tretji teoretični izpit iz OME, 07.09.2021

- Čas pisanja: **45 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk. V oglatih oklepajih $[\cdot]$ je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

---

1. Izberite si neko **strogo** naraščajoče navzgor omejeno zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Izberimo zaporedje $a_n = 1 - \frac{1}{n}$.

(a) [**8**] Ali zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira? Odgovor utemeljite. Če je odgovor da, določite še $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ker je zaporedje a_n naraščajoče in navzgor omejeno, po izreku o konvergenci monotonih zaporedij konvergira. Za izbrano zaporedje velja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1.$$

(b) [**8**] Naj bo zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definirano kot $b_n = a_{n+1} - a_n$. Izračunajte n-to delno vsoto S_n vrste $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Po definiciji n-te delne vsote vrste velja

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + \ldots + b_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1. \qquad (1)$$

Za izbrano zaporedje velja

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

(c) [**10**] Ali je vrsta $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ iz točke (1b) konvergentna? Odgovor utemeljite. Če je odgovor da, določite še vsoto vrste.

Vrsta je po definiciji konvergentna natanko tedaj, ko je konvergentno zaporedje delnih vsot. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1,$$

je vrsta konvergentna, njena vsota pa je 1.

(d) [**8**] Ali je odgovor na vprašanje (1c) odvisen od izbire zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$? Če da, potem poiščite zaporedje $\{\tilde{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pri katerem je odgovor drugačen, sicer pa utemeljite, zakaj se odgovor ne spremeni.

Odgovor na vprašanje (1c) ni odvisen od izbire zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Po (1) velja $S_n = a_{n+1} - a_1$ in zato

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_1) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_1. \tag{2}$$

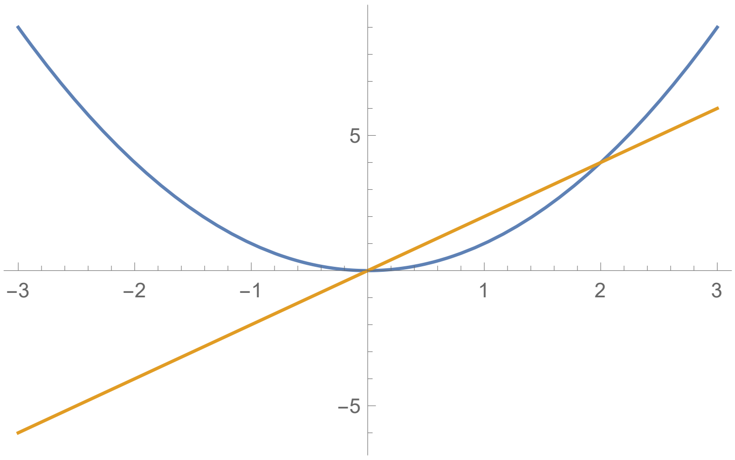
Ker je zaporedje a_n konvergentno, limita v (2) obstaja.

2. Rešite naslednje naloge:

(a) Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **soda nekonstantna** zvezno odvedljiva funkcija.

i. [**10**] Skicirajte grafa neke funkcije f z zgornjimi lastnostmi in njenega odvoda f'.

Primer funkcije f in njenega odvoda f' sta polinoma $f(x) = x^2$ in $f'(x) = 2x$:



ii. [**8**] Kakšna je zveza med $f'(x)$ in $f'(-x)$?

Opazimo lahko, da je funkcija f' liha in zato $f'(x) = -f'(-x)$.

Prepričajmo se o tem še računsko. Po definiciji odvoda vemo, da je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{in} \qquad f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h}.$$

Torej je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-h} = -f'(-x), \end{aligned}$$

kjer smo v drugi enakosti upoštevali, da je f soda funkcija.

(b) Naj bo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija, ki zadošča $g(x) < 0 < g'(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

i. [**3**] Katero lastnost ima funkcija g, ker zadošča pogoju $0 < g'(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$?

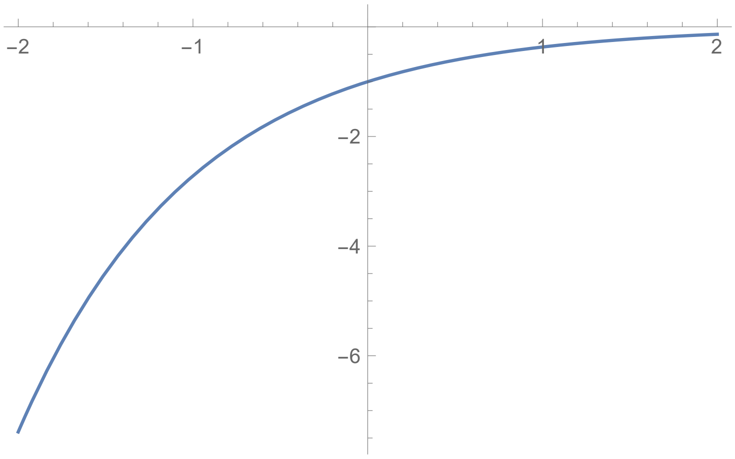
Pogoj pomeni, da funkcija g ves čas strogo narašča.

ii. [**3**] Kje v $\mathbb{R}^2$ leži graf funkcije g, ker ta zadošča pogoju $g(x) < 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$?

Pogoj pomeni, da graf funkcije g leži pod abscisno osjo.

iii. [**5**] Skicirajte graf neke funkcije g z zgornjimi lastnostmi.

Iščemo funkcijo, ki je strogo naraščajoča, njen graf pa leži pod abscisno osjo. Primer take funkcije je $g(x) = -e^{-x}$:



iv. [**7**] Preverite, da je funkcija $h(x) = e^{-x}g(x)$ naraščajoča.

Preveriti moramo, da je $h'(x) \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Velja

$$h'(x) = -e^{-x}g(x) + e^{-x}g'(x) = e^{-x}(g'(x) - g(x)). \tag{3}$$

Vemo, da je $e^{-x} > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, hkrati pa je po predpostavki $g'(x) - g(x) \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Upoštevamo ti dve dejstvi v (3) in zaključimo, da je res $h'(x) \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

---

3. Naj bo dana funkcija $g(x, y) = x^2 + \int_0^y \sqrt{1 - t^2}\, dt$.

(a) [**8**] Določite definicijsko območje D_g funkcije g.

Za spremenljivko x nimamo nobene omejitve v definiciji funkcije g. Za spremenljivko y po mora veljati, da je integrand $\sqrt{1 - t^2}$ dobro definiran za vsak $t \in [0, y]$. Torej mora biti $1 - t^2 \geq 0$ oz. $t \in [-1, 1]$. Zato je $D_g = \mathbb{R} \times [-1, 1]$.

(b) [**8**] Utemeljite, da je $\dfrac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \sqrt{1 - y^2}$.

Po osnovnem izreku integralskega računa za zvezno funkcijo h velja $\dfrac{\partial}{\partial y} \displaystyle\int_0^y h(t)\, dt = h(y)$.

(c) [**14**] Določite vse **kandidate** za vezane ekstreme funkcije g na krožnici $x^2 + y^2 = 1$. (Ni potrebno klasificirati, kateri izmed kandidatov so res vezani ekstremi.)

Namig. Če točke (3b) ne znate rešiti, lahko vseeno rešite (3c) z upoštevanjem, kaj je $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$.

Definirajmo Lagrangeovo funkcijo

$$L(x, y, \lambda) = g(x, y) - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Vezane ekstreme iščemo med stacionarnimi točkami funkcije L:

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 2x - \lambda \cdot 2x = 2x(1-\lambda) = 0, \\ L_y(x,y,\lambda) &= \sqrt{1-y^2} - \lambda \cdot 2y = 0, \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Iz $L_x = 0$ sledi $x = 0$ ali $\lambda = 1$.

- Če je $x = 0$, iz $L_\lambda = 0$ sledi $y = \pm 1$ in iz $L_y = 0$ sledi $\lambda = 0$. Torej sta $(0,1)$ in $(0,-1)$ stacionarni točki L.
- Če je $\lambda = 1$, iz $L_y = 0$ sledi $\sqrt{1-y^2} = 2y$. Od tod s kvadriranjem in upoštevanjem $y \geq 0$ dobimo $1 - y^2 = 4y^2$. Torej je $y^2 = \frac{1}{5}$ in zato $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Iz $L_\lambda = 0$ sledi še $x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. Torej sta $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ in $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ stacionarni točki L.

Opomba: Izkaže se, da je

$$\begin{aligned} g(0,1) &= \frac{\pi}{4} \approx 0.785, \\ g(0,-1) &= -\frac{\pi}{4} \approx -0.785, \\ g\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) &= g\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 1.23. \end{aligned}$$

Torej je točka $(0,-1)$ vezani minimum, točki $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ in $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ pa sta vezana maksimuma.