

Karnaughjevi diagrami

Digitalna vezja

Miha Moškon

miha.moskon@fri.uni-lj.si

<https://fri.uni-lj.si/en/about-faculty/employees/miha-moskon>

Karnaughjevi diagrami (K-map)

Način vizualizacije pravilnostne tabele, tako da je ta lažja za minimizacijo

Sosednost med mintermi (vhodnimi vektorji) se nanaša na sosednost med polji

Omogoča določanje MDNO (in MKNO) na podlagi iskanja vzorcev

Primerno za ročen postopek minimizacije

Sosednost med stolpci in vrsticami

Fizično sosedna stolpca morata biti tudi logično sosedna

Fizično sosedni vrstici morata biti tudi logično sosedni

Štetje z Grayevim kodiranjem – sosedna koda se razlikujeta natanko za eno negacijo

Grayevo kodiranje

Sosedna koda se razlikujeta za natanko eno negacijo

Primer: $n=2$: $00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10$

Primer: $n=3$: $000 \rightarrow 001 \rightarrow 011 \rightarrow 010 \rightarrow 110 \rightarrow 111 \rightarrow 101 \rightarrow 100$

Tudi kod 2^n-1 in kod 0 se razlikujeta le za eno negacijo

Sosednost se odraža preko robov!

Grayeva koda

Izračun koda za število k : $G(k) = k \wedge (k \gg 1)$

Primer: $n=3$, $k = 5$

$$5_{10} = 101_2$$

$$101 \gg 1 = 010$$

$$101 \wedge 010 = (1 \text{ XOR } 0)(0 \text{ XOR } 1)(1 \text{ XOR } 0) = 111$$

$$G(5) = 111$$

Grayeva koda

Recept za štetje pri $n = 3$.

Če znamo šteti za $n = 2$, znamo tudi za $n = 3$

$00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10$

Ponovimo enako sekvenco, pri čemer postavimo MSB na 0:

$000 \rightarrow 001 \rightarrow 011 \rightarrow 010$

Nadaljujemo tako, da damo MSB na 1 in sekvenco ponovimo (tokrat s štetjem navzdol):

$110 \rightarrow 111 \rightarrow 101 \rightarrow 100$

Grayeva koda

Recept za štetje pri $n = 4$.

Če imamo sekvenco za $n = 3$, lahko iz nje naredimo sekvenco za $n = 4$

$n = 3$ (navzgor):

000 → 001 → 011 → 010 → 110 → 111 → 101 → 100

$n = 3$ (navzdol):

100 → 101 → 111 → 110 → 010 → 011 → 001 → 000

$n = 4$ (1. del – MSB = 0, štetje gor):

0000 → **0001** → **0011** → **0010** → **0110** → **0111** → **0101** → **0100**

$n = 4$ (2. del – MSB = 1, štetje dol):

1100 → **1101** → **1111** → **1110** → **1010** → **1011** → **1001** → **1000**

Karnaughjevi diagrami (K-map)

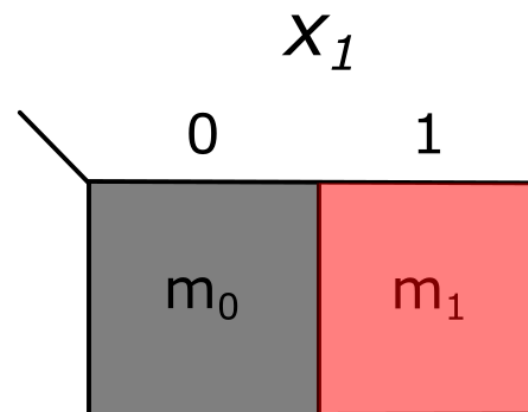
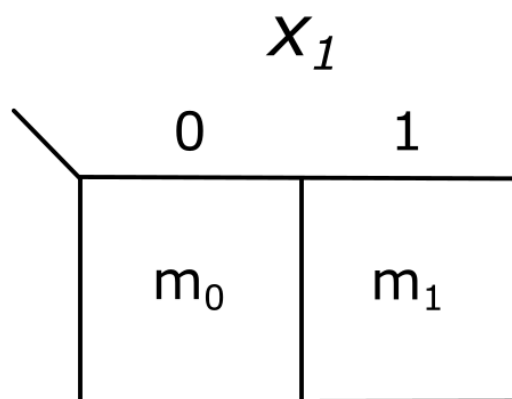
Način vizualizacije pravilnostne tabele, tako da je ta lažja za minimizacijo

2^n polj

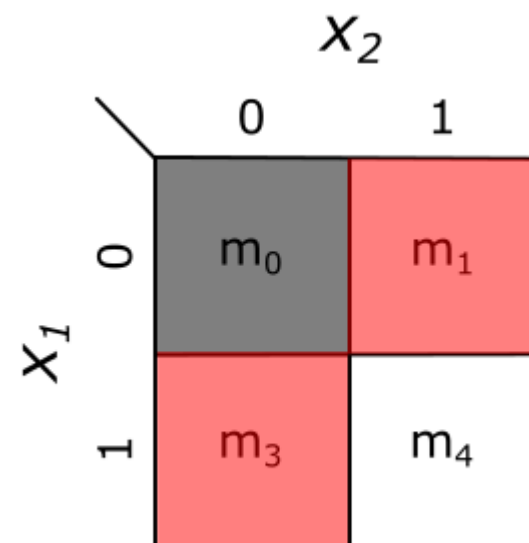
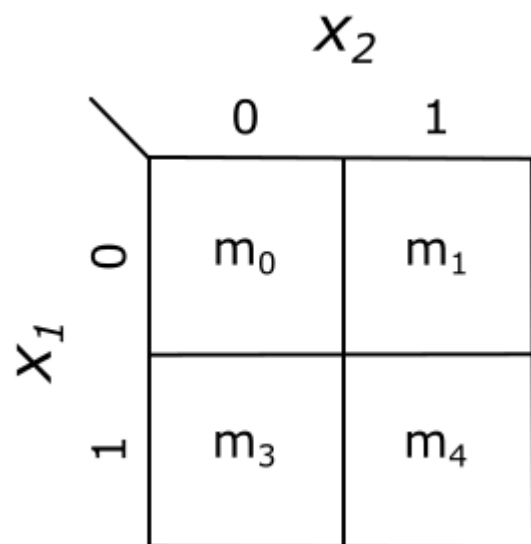
Označevanje pokritij spremenljivk: pokritja moramo označiti tako, da pridemo do vseh 2^n kombinacij vhodnih spremenljivk

Vsi vhodni vektorji \rightarrow vsi mintermi

Karnaughjevi diagrami (n=1)



Karnaughjevi diagrami (n=2)



Karnaughjevi diagrami (n=3)

		X_2, X_3			
		00	01	11	10
X_1	0	m_0	m_1	m_3	m_2
	1	m_4	m_5	m_7	m_6

		X_2, X_3			
		00	01	11	10
X_1	0	m_0	m_1	m_3	m_2
	1	m_4	m_5	m_7	m_6

Karnaughjevi diagrami (n=4)

		X_3, X_4			
		00	01	11	10
X_1, X_2	00	m_0	m_1	m_3	m_2
	01	m_4	m_5	m_7	m_6
	11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
	10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

Karnaughjevi diagrami (n=4)

		X_3, X_4			
		00	01	11	10
X_1, X_2	00	m_0	m_1	m_3	m_2
	01	m_4	m_5	m_7	m_6
	11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
	10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

Karnaughjevi diagrami (n=5)

		X_3, X_4, X_5							
		000	001	011	010	110	111	101	100
X_1, X_2	00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
	01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
	11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
	10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

Karnaughjevi diagrami (n=5)

		X_3, X_4, X_5							
		000	001	011	010	110	111	101	100
X_1, X_2	00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
	01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
	11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
	10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

Karnaughjevi diagrami (n=5, alternativa)

		X_3, X_4			
		00	01	11	10
X_1, X_2	00	m_0	m_2	m_6	m_4
	01	m_8	m_{10}	m_{14}	m_{12}
	11	m_{24}	m_{26}	m_{30}	m_{28}
	10	m_{16}	m_{18}	m_{22}	m_{20}

$x_5=0$

		X_3, X_4			
		00	01	11	10
X_1, X_2	00	m_1	m_3	m_7	m_5
	01	m_9	m_{11}	m_{15}	m_{13}
	11	m_{25}	m_{27}	m_{31}	m_{29}
	10	m_{17}	m_{19}	m_{23}	m_{21}

$x_5=1$

Karnaughjevi diagrami (n=5, alternativa)

Karnaugh map for $x_5 = 0$. The vertical axis is labeled x_1, x_2 and the horizontal axis is labeled x_3, x_4 .

	x_3, x_4			
	00	01	11	10
00	m_0	m_2	m_6	m_4
01	m_8	m_{10}	m_{14}	m_{12}
11	m_{24}	m_{26}	m_{30}	m_{28}
10	m_{16}	m_{18}	m_{22}	m_{20}

$x_5 = 0$

Karnaugh map for $x_5 = 1$. The vertical axis is labeled x_1, x_2 and the horizontal axis is labeled x_3, x_4 .

	x_3, x_4			
	00	01	11	10
00	m_1	m_3	m_7	m_5
01	m_9	m_{11}	m_{15}	m_{13}
11	m_{25}	m_{27}	m_{31}	m_{29}
10	m_{17}	m_{19}	m_{23}	m_{21}

$x_5 = 1$

Zapis funkcije s Karnaughjevimi diagrami

1. Funkcijo zapišemo v PDNO
2. Enice vpišemo v polja, ki pripadajo mintermom v PDNO

Primer: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee^4(0, 2, 3, 4, 6, 7, 15)$

		x_3, x_4			
		00	01	11	10
x_1, x_2	00	m_0	m_1	m_3	m_2
	01	m_4	m_5	m_7	m_6
	11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
	10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}



		x_3, x_4			
		00	01	11	10
x_1, x_2	00	1		1	1
	01	1		1	1
	11			1	
	10				

Minimizacija s Karnaughjevimi diagrami

1. Funkcijo v Karnaughjevem diagram
2. Določimo potrebne glavne vsebovalnike:
 - med seboj združujemo čim večje število sosednih mintermov, pri katerih je funkcijska vrednost enaka 1
 - združujemo lahko 1,2,4,8,16,... mintermov
 - iščemo najmanjši nabor pokritij, s katerim pokrijemo vse enice
 - v vsakem koraku poskušamo dobiti čim večje pokritje, saj s tem izločimo večje število vhodnih spremenljivk

Minimizacija s Karnaughjevimi diagrami

Primer:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee^4(0, 2, 3, 4, 6, 7, 15)$$

