Minimizacija

Digitalna vezja

Miha Moškon

miha.moskon@fri.uni-lj.si

https://fri.uni-lj.si/en/about-faculty/employees/miha-moskon

Sosednost

Dva konjunktivna logična izraza sta sosedna, če se razlikujeta po natanko eni negaciji

Natančneje:

Pogoj 1: oba izraza vsebujeta enake vhodne spremenljivke

Pogoj 2: razlikujeta se po točno eni negaciji

Posledica sosednosti

Če imam dva sosedna konjunktivna izraza med seboj povezana preko disjunkcije, ju lahko združim v skupen konjunktiven izraz, v katerem vhodna spremenljivka, po kateri se razlikujeta, odpade

Primer:

$$\overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 = (\overline{x}_1 \vee x_1) x_2 x_3 = 1 x_2 x_3 = x_2 x_3$$

Obe metodi minimizacije, ki ju bomo obravnali, temeljita na takem načinu izločanja odvečnih spremenljivk

Vsebovalniki

Vsebovalnik: konjunktiven izraz, ki pokrije skupino enic / skupino mintermov.

Glavni vsebovalnik: najkrajši možen konjunktiven izraz, ki pokrije skupino enic / mintermov

Potrebni glavni vsebovalnik: glavni vsebovalnik, ki pokrije enico, ki je ne more pokriti noben drug glavni vsebovalnik

Minimalna disjunktivna normalna oblika (MDNO)

Najmanjša možna disjuntkivna normalna oblika zapisa funkcije

Določanje na podlagi sosednosti

Izhajamo iz zapisa PDNO

Tabelarična (Quine-McCluskey) metoda minimizacije – določitev glavnih vsebovalnikov

Začnemo z mintermi (n vhodnih spremenljivk) – stolpec n

Stolpec i: Iščemo sosedne člene in njihove glavne vsebovalnike izpisujemo v naslednji stolpec (i – 1); ko ne najdemo nobenega soseda več, nadaljujemo s postopkom v naslednjem stolpcu (i – 1)

Ponavljamo, dokler ne pridemo do stolpca 0 ali ne najdemo nobenega soseda več

S tem pridemo do glavnih vsebovalnikov

Tabelarična (Quine-McCluskey) metoda minimizacije – določitev potrebnih glavnih vsebovalnikov

Narišemo tabelo glavnih vsebovalnikov

Stolpci: mintermi, ki jih moramo pokriti

Vrstice: glavni vsebovalniki in njihova pokritja mintermov

Množica potrebnih glavnih vsebovalnikov: najmanjša množica glavnih vsebovalnikov, ki pokriva vse minterme → MDNO

Zgled $f = \vee^4(1,4,6,7,8,9,10,11,15)$ *zapiši v MDNO*

Najprej zapišemo prvi stolpec (mintermi)

	4
(1)	$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$
(4)	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$
(6)	$\overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4$
(7)	$\overline{x}_1x_2x_3x_4$
(8)	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$
(9)	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$
(10)	$x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4$
(11)	$x_1\overline{x}_2x_3x_4$
(15)	$x_1x_2x_3x_4$

Zgled $f = \vee^4(1,4,6,7,8,9,10,11,15)$ *zapiši v MDNO*

Na podlagi sosednih izrazov določimo glavne vsebovalnike v naslednjem stoplcu. Pokrite minterme "obkljukamo"

	4		3
(1)	$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$ ✓	(1,9)	$\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$
(4)	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$ ✓	(4,6)	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_4$
(6)	$\overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4$ ✓	(6,7)	$\overline{x}_1x_2x_3$
(7)	$\overline{x}_1x_2x_3x_4$ ✓	(7,15)	$x_2x_3x_4$
(8)	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$ ✓	(8,9)	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$
(9)	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$ ✓	(8,10)	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_4$
(10)	$x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4$ ✓	(9,11)	$x_1\overline{x}_2x_4$
(11)	$x_1\overline{x}_2x_3x_4$ ✓	(10,11)	$x_1\overline{x}_2x_3$
(15)	$x_1x_2x_3x_4$ ✓	(11,15)	$x_1x_3x_4$

Zgled $f = \vee^4(1,4,6,7,8,9,10,11,15)$ *zapiši v MDNO*

Nadaljujemo v naslednjem stolpcu

	4		3		2
(1)	$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$ ✓	(1,9)	$\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$	((8,9),(10,11))	$x_1\overline{x}_2$
(4)	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$ ✓	(4,6)	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_4$	((8,10),(9,11))	
(6)	$\overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4$ ✓	(6,7)	$\overline{x}_1x_2x_3$		
(7)	$\overline{x}_1x_2x_3x_4$ ✓	(7,15)	$x_2x_3x_4$		
(8)	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$ ✓	(8,9)	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ ✓		
(9)	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$ ✓	(8,10)	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_4$ ✓		
(10)	$x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4$ ✓	(9,11)	$x_1\overline{x}_2x_4$ ✓		
(11)	$x_1\overline{x}_2x_3x_4$ ✓	(10,11)	$x_1\overline{x}_2x_3$ ✓		
(15)	$x_1x_2x_3x_4$ ✓	(11,15)	$x_1x_3x_4$		

Zgled $f = \vee^4(1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15)$ *zapiši v MDNO*

Naprej ne gre…

Zapišemo tabelo pokritij:

		m_1	m_4	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	m_{15}
✓	$\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$	✓					✓			
✓	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_4$		✓	✓						
	$\overline{x}_1x_2x_3$			✓	✓					
✓	$x_2x_3x_4$				✓					✓
	$x_1x_3x_4$								✓	✓
✓	$x_1\overline{x}_2$					✓	✓	✓	✓	

Zgled $f = \vee^4(1,4,6,7,8,9,10,11,15)$ *zapiši v MDNO*

Iz tabele lahko razberemo potrebne glavne vsebovalnike:

		m_1	m_4	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	m_{15}
✓	$\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$	✓					✓			
✓	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_4$		✓	✓						
	$\overline{x}_1x_2x_3$			✓	✓					
✓	$x_2x_3x_4$				✓					✓
	$x_1x_3x_4$								✓	✓
✓	$x_1\overline{x}_2$					✓	✓	✓	✓	

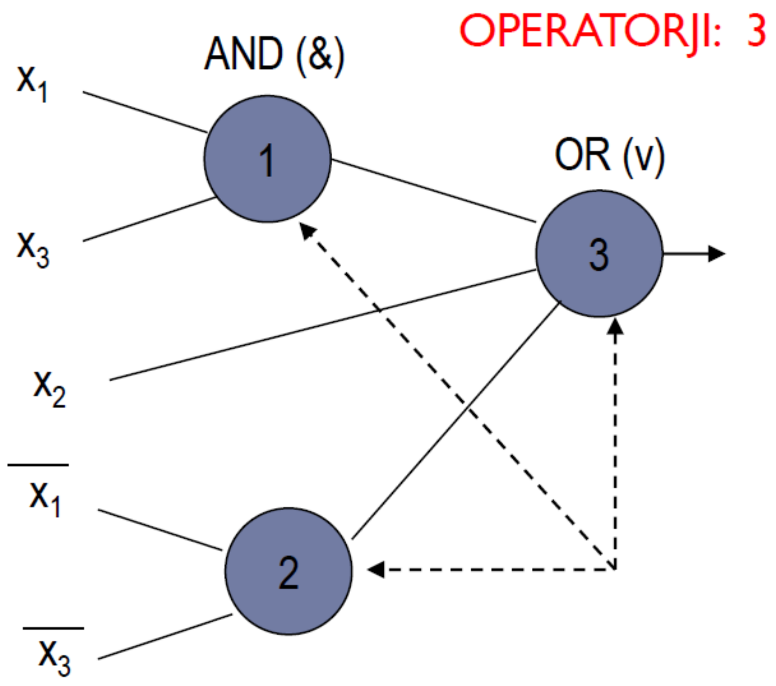
$$f_{MDNO}(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1\overline{x}_2 \vee x_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3x_4$$

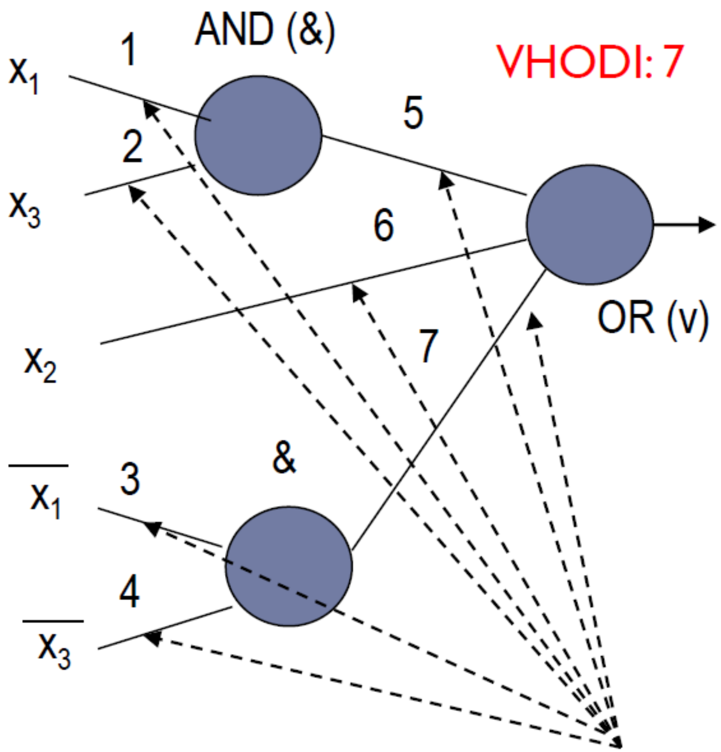
Določitev kompleksnosti MDNO

Kriterij 1 (operatorji): štejemo število porabljenih konjunkcij in disjunkcij

Kriterij 2 (vhodi): štejemo skupno število vhodov v konjunkcije in disjunkcije

$f_{MDNO}(x_1, x_2, x_3) = x_1.x_3 \vee x_2 \vee \overline{x_1}.\overline{x_3}$





Zgled – Določitev kompleksnosti MDNO

$$f_{MDNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x}_2 \vee x_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3x_4$$

Vrat (operatorjev): 5

Vhodov (operandov): 15

Določitev MKNO

1) Funkcijo negiramo
2) Določimo MDNO negirane funkcije
3) Negiramo MDNO negirane funkcije in dobimo MKNO izhodiščne funkcije

Določitev MNO

1) Določimo MDNO
2) Določimo MKNO
3) Določimo kompleksnost MDNO in MKNO
4) MNO je tista, ki ima manjše število operatorjev; če je število operatorjev enako, je MNO tista, ki ima manjše število vhodov

Tabelarična (Quine-McCluskey) metoda minimizacije

Prednosti:

- primerna za večje število vhodnih spremenljivk
- relativno enostaven algoritem

Slabosti:

- računska kompleksnost pri velikem številu vhodnih spremenljivk (ampak – bolje ne gre – NP težak problem)
- manj primerna za ročno računanje