

Popolne oblike zapisa preklopnih funkcij

Digitalna vezja

Miha Moškon

miha.moskon@fri.uni-lj.si

<https://fri.uni-lj.si/en/about-faculty/employees/miha-moskon>

Funkcijska polnost disjunkcije, konjunkcije in negacije

Vsako funkcijo lahko zapišemo z uporabo AND, OR in NOT (AND ali OR lahko tudi izpustimo, ampak vseeno zaenkrat ne)

Normalne oblike zapisa:

- zapis funkcije v dvonivojski obliki
- na posameznem nivoju nastopa le en logični operator

Popolna oblika zapisa:

- v vseh izrazih vhodnega nivoja nastopajo vse vhodne spremenljivke

Popolna disjunktivna normalna oblika

- Normalna: 2 nivoja
- Disjunktivna: operator izhodnega nivoja (2) je disjunkcija
- Popolna: v vseh členih vhodnega nivoja 1 nastopajo vse vhodne spremenljivke

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i f(\vec{w}_i)$$

$f(\vec{w}_i)$... vrednost funkcije pri i -tem vhodnem vektorju (vrstici)

m_i ... minterm i ; $m_i = x_1^{w_{1,i}} \cdot x_2^{w_{2,i}} \cdot \dots \cdot x_n^{w_{n,i}}$; $i = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$

$$x^w = \begin{cases} x, & w = 1 \\ \bar{x}, & w = 0 \end{cases}$$

$w_{j,i}$... j -ti bit binarnega zapisa števila i

Mintermi in pravilnostna tabela

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	minterm
0	0	0	$f(\vec{w}_0)$	$m_0 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
0	0	1	$f(\vec{w}_1)$	$m_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$
0	1	0	$f(\vec{w}_2)$	$m_2 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$
0	1	1	$f(\vec{w}_3)$	$m_3 = \bar{x}_1 x_2 x_3$
1	0	0	$f(\vec{w}_4)$	$m_4 = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
1	0	1	$f(\vec{w}_5)$	$m_5 = x_1 \bar{x}_2 x_3$
1	1	0	$f(\vec{w}_6)$	$m_6 = x_1 x_2 \bar{x}_3$
1	1	1	$f(\vec{w}_7)$	$m_7 = x_1 x_2 x_3$

Popolna konjunktivna oblika

- Normalna: 2 nivoja
- Konjunktivna: operator izhodnega nivoja (2) je konjunkcija
- Popolna: v vseh členih vhodnega nivoja (1) nastopajo vse vhodne spremenljivke

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \&_{i=0}^{2^n-1} (M_i \vee f(\vec{w}_i))$$

M_i ... maksterm i ; $M_i = x_1^{\bar{w}_{1,i}} \vee x_2^{\bar{w}_{2,i}} \vee \dots \vee x_n^{\bar{w}_{n,i}}$; $i = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$

Makstermi in pravilnostna tabela

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	maksterm
0	0	0	$f(\vec{w}_0)$	$M_0 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$
0	0	1	$f(\vec{w}_1)$	$M_1 = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$
0	1	0	$f(\vec{w}_2)$	$M_2 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$
0	1	1	$f(\vec{w}_3)$	$M_3 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$
1	0	0	$f(\vec{w}_4)$	$M_4 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$
1	0	1	$f(\vec{w}_5)$	$M_5 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$
1	1	0	$f(\vec{w}_6)$	$M_6 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$
1	1	1	$f(\vec{w}_7)$	$M_7 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$

Primer

Zapiši funkcijo v PDNO!

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2x_3$$

Tabela:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	minterm
0	0	0	0	m_0
0	0	1	0	m_1
0	1	0	0	m_2
0	1	1	1	m_3
1	0	0	1	m_4
1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	m_6
1	1	1	1	m_7

Nadaljevanje primera

Vstavimo v enačbo PDNO:

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \vee x_2x_3 \\ &= m_0 \cdot 0 \vee m_1 \cdot 0 \vee m_2 \cdot 0 \vee m_3 \cdot 1 \vee m_4 \cdot 1 \vee m_5 \cdot 1 \vee m_6 \cdot 1 \vee m_7 \cdot 1 \\ &= m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \\ &= \vee^3(4, 5, 6, 7) \\ &= x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3\end{aligned}$$

Dobili smo minterme, ki so soležni enicam v tabeli!

Primer

Zapiši funkcijo v PKNO!

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2x_3$$

Tabela:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	Maksterm
0	0	0	0	M_0
0	0	1	0	M_1
0	1	0	0	M_2
0	1	1	1	M_3
1	0	0	1	M_4
1	0	1	1	M_5
1	1	0	1	M_6
1	1	1	1	M_7

Nadaljevanje primera

Vstavimo v enačbo PKNO:

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \vee x_2x_3 \\ &= (M_0 \vee 0) \cdot (M_1 \vee 0) \cdot (M_2 \vee 0) \cdot (M_3 \vee 1) \cdot (M_4 \vee 1) \cdot (M_5 \vee 1) \cdot (M_6 \vee 1) \cdot (M_7 \vee 1) \\ &= M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \\ &= \&^3(0, 1, 2) \\ &= (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)\end{aligned}$$

Dobili smo maksterme, ki so soležni ničlam v tabeli!

Relacije med mintermi in makstermi

$$\overline{m}_i = M_i$$

$$m_i \vee M_i = 1$$

$$\overline{M}_i = m_i$$

$$m_i \cdot M_i = 0$$

Relacije med mintermi in makstermi

$$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1 \quad \forall i \neq j : m_i \cdot m_j = 0$$

$$\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0 \quad \forall i \neq j : M_i \vee M_j = 1$$

Pretvorba med oblikama

Zaradi komplementarnosti med mintermi in makstermi lahko pridemo hitro iz ene oblike do druge:

- 1) Funkcijo negiramo (izpišemo komplementarne terme)
- 2) Indeksi predstavljajo kar indekse končnih termov

Pretvorba med oblikama

Primer: $V^3(3,4,5,6,7)$ pretvori v PKNO

- 1) Komplementarni mintermi (negirana funkcija): $V^3(0,1,2)$
- 2) Dualni makstermi: $\&^3(0,1,2)$

Pretvorba med oblikama

Primer: $\&^3(0,1,2)$ pretvori v PDNO

- 1) Komplementarni makstermi (negirana funkcija): $\&^3(3,4,5,6,7)$
- 2) Dualni mintermi: $V^3(3,4,5,6,7)$