Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Matematika: prvi kolokvij - računski del

6. december 2023

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Poskusi prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so strogo prepovedani. **Vse odgovore dobro utemeljite!**

1. naloga (25 točk)

Dano je kompleksno število

$$a = \frac{1}{i} + \frac{1}{1-i}.$$

a) (7 točk) Zapišite kompleksno število a v obliki $x + yi$. Določite $\mathrm{Re}(a)$ in $\mathrm{Im}(a)$.

$$a = \frac{1-i+i}{i(1-i)} = \frac{1}{i+1} \quad 2 \quad \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{1-i}{1+1} \quad 2 \quad = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad 1$$

$$\mathrm{Re}(a) = \frac{1}{2} \quad 1 \qquad \mathrm{Im}(a) = -\frac{1}{2} \quad 1$$

b) (8 točk) Izračunajte a^4.

$$\tan\varphi = -1$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} \quad 2$$

$$a^4 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}^4 e^{i(-\frac{\pi}{4})\cdot 4} \quad 2 \quad = \frac{1}{4}e^{-i\pi} = -\frac{1}{4} \quad 2$$

$$|a| = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \quad 2$$

c) (10 točk) Poiščite vse rešitve enačbe $z^3 = -8$. Rešitve zapišite v obliki $x + iy$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|-8| = 8 \quad 1 \qquad z^3 = 8e^{i\pi}$$

$$\varphi = \pi \quad 1$$

$$z_k = \sqrt[3]{8}\, e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{3}} \quad 2 \quad ; k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3} \quad 2$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{3}} = 2e^{i\pi} = -2 \quad 2$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3} \quad 2$$

2. naloga (25 točk)

Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \sqrt{\frac{3n}{n+1}}$.

a) (10 točk) Pokažite, da je zaporedje a_n naraščajoče.

$a_{m+1} > a_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$ (2)

$\sqrt{\frac{3(m+1)}{m+1+1}} > \sqrt{\frac{3m}{m+1}} \quad \nearrow^{2}$

OBE STRANI STA POZITIVNE (2)

$\frac{3m+3}{m+2} > \frac{3m}{m+1}$ (2) $\quad / \cdot (m+1)(m+2) > 0$

$(3m+3)(m+1) > 3m(m+2)$ (2)

$\cancel{3m^2} + \cancel{3m} + \cancel{3m} + 3 > \cancel{3m^2} + \cancel{6m}$ (2)

$3 > 0 \Rightarrow a_m$ je NARAŠČAJOČE ZAPOREDJE

b) (5 točk) Poiščite limito zaporedja a_n.

$\lim\limits_{m\to\infty} a_m = \lim\limits_{m\to\infty} \sqrt{\frac{3m}{m+1}} \;\frac{:\sqrt{m}}{:\sqrt{m}}$ (2) $= \lim\limits_{m\to\infty} \sqrt{\frac{3}{1+\frac{1}{m}}} = \sqrt{3}$ (1)

$\frac{1}{m} \to 0$ (2)

c) (10 točk) Ali je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^n}$ konvergentna? Če je, jo seštejte.

$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4^m}{5^m} = 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^m$ (3) $\Rightarrow$ VRSTA KONVERGIRA, SAJ JE GEOMETRIJSKA IN $\left|\frac{4}{5}\right| < 1$ (3)

$2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^m = \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{5}}$ (2) $= \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{\frac{1}{5}} = \frac{8}{5} \cdot 5 = 8$ (2)

3. naloga (25 točk)

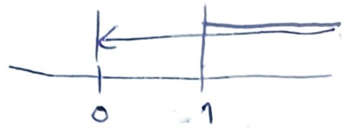
Naj bo funkcija f podana s predpisom $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$.

$$\frac{x-1}{x} \geq 0$$

a) (10 točk) Poiščite definicijsko območje funkcije f.

I $\boxed{x-1 \geq 0}$ in $\boxed{x>0}$ 2

$x \geq 1$



$\boxed{x \geq 1}$ 2

II $\boxed{x-1 \leq 0}$ in $\boxed{x<0}$ 2

$x \leq 1$ in $x<0$

$x<0$ 2

$\mathcal{D}_f = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ 2

b) (10 točk) Pokažite, da je f injektivna funkcija.

f je injektivna, če $\forall x,y \in \mathcal{D}_f$ velja $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$f(x) = f(y)$

$\sqrt{\frac{x-1}{x}} = \sqrt{\frac{y-1}{y}} \quad \nearrow^2$ 3

$\frac{x-1}{x} = \frac{y-1}{y} \quad / \cdot x \cdot y$ 3

$y(x-1) = x(y-1)$

$\cancel{xy} - y = \cancel{xy} - x$ 3

$-y = -x \Rightarrow x = y \Rightarrow f$ je INJEKTIVNA 1

c) (5 točk) Poiščite inverz f^{-1} funkcije f.

$y = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$

$x = \sqrt{\frac{y-1}{y}} \quad \nearrow^2$ 2

$x^2 = \frac{y-1}{y}$

$yx^2 = y - 1$

$yx^2 - y = -1$ 1

$y(x^2-1) = -1$

$y = \frac{-1}{x^2-1}$ 1

$y = \frac{1}{1-x^2}$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2}$ 1

4. naloga (25 točk)

Naj bo funkcija f podana s predpisom $f(x) = \frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-2x-8}$.

a) (15 točk) Določite definicijsko območje, ničle in pole funkcije f. Zapišite enačbo asimptote ter določite presečišče grafa f z asimptoto. Skicirajte graf funkcije f.

NIČLE: $x^3-3x^2-x+3=0$

$x^2(x-3)-(x-3)=0$

$(x-3)(x^2-1)=0$

$(x-3)(x-1)(x+1)=0$

$x_1=3$

$x_2=-1$ (2)

$x_3=1$

AS: $(x^3-3x^2-x+3):(x^2-2x-8)=x-1$

$\underline{-(x^3-2x^2-8x)}$

$-x^2+5x+3$

$\underline{-(-x^2+2x+8)}$

$5x-5=0$

AS: $y=x-1$ (2)

PRESEČIŠČE

$5x=5$

$\boxed{x=1}$ (2)

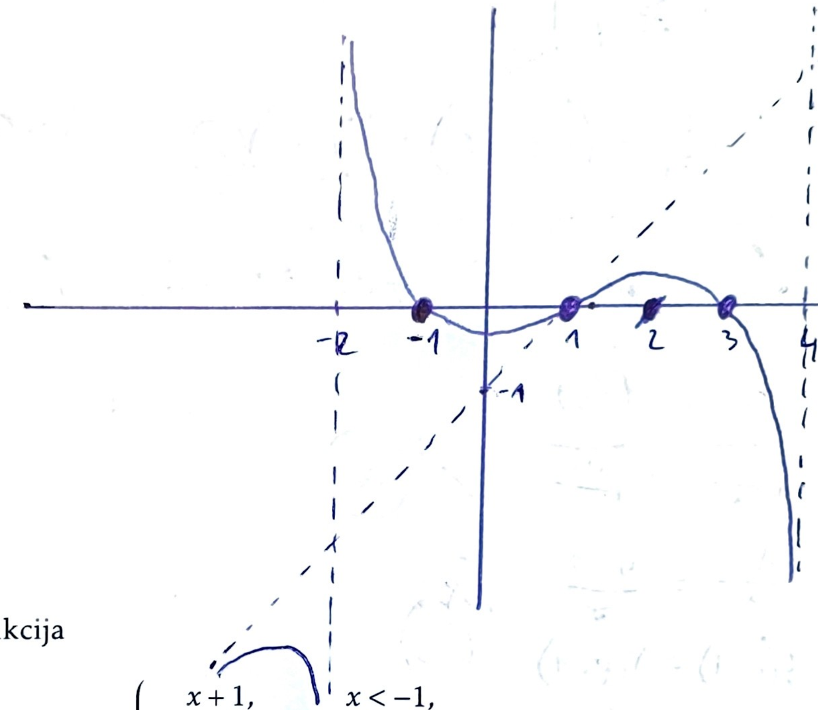
POLI: $x^2-2x-8=0$

$(x-4)(x+2)=0$

$x_1=4$

$x_2=-2$ (2)

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2,4\}$ (2)



NIČLE (1)

POLI (1)

AS + PRESEČIŠČE (1)

KRIVULJA (2)

b) (10 točk) Ali je funkcija

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & x<-1, \\ f(x), & -1 \le x \le 3, \\ \dfrac{(x-3)^2}{x^2-9}, & x>3. \end{cases}$$

zvezna v točkah $x=-1$ in $x=3$? Utemeljite.

$\boxed{x=-1}$ $\lim\limits_{x\nearrow -1} x+1=0$ (2) $\quad f(-1)=g(-1)=0$ (1) $\Rightarrow g$ je zvezna v $x=-1$ (1)

$\boxed{x=3}$ $\lim\limits_{x\searrow 3}\frac{(x-3)^2}{x^2-9}$ (2) $=\lim\limits_{x\searrow 3}\frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-3)}(x+3)}$ (2) $=\frac{0}{6}=0$

$g(3)=f(3)=0$ (1)

$\Bigg\}$ g je zvezna v $x=3$ (1)