Ime in priimek (s TISKANIMI ČRKAMI)

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Matematika: drugi kolokvij - računski del

17. januar 2024

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Poskusi prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so strogo prepovedani. **Vse odgovore dobro utemeljite!**

1. naloga (25 točk)

Naj bo podana funkcija f s predpisom $f(x) = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$.

a) (10 točk) Določi in klasificiraj stacionarne točke.

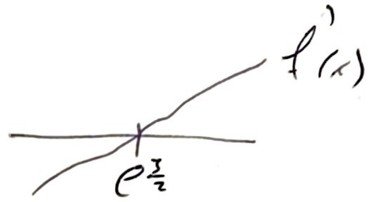
$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \log x) \cdot 2x}{x^4} \; 2 = \frac{-x - (1 - \log x) \cdot 2x}{x^4} \; 2 = \frac{-(1 + 2 - 2\log x)}{x^3}$$

$$= \frac{2\log x - 3}{x^3} \; 2$$

$$2 \log \cancel{x} - 3 = 0$$

$$\log x = \frac{3}{2}$$

$$x = e^{\frac{3}{2}} \; 2$$



$\mathcal{D}_f = (0, \infty)$

$x =$ lok. min 2

b) (5 točk) Določi intervale naraščanja in padanja.

f PADA : $x \in (0, e^{\frac{3}{2}})$ 3

f NARAŠČA : $x \in (e^{\frac{3}{2}}, \infty)$ 2

c) (5 točk) Določi zalogo vrednosti funkcije f.

$$Z_f = \left[-\frac{1}{2e^3}, \infty\right) \; 2$$

$$f(e^{\frac{3}{2}}) = -\frac{1}{2e^3}$$

3

d) (5 točk) Določi točko na grafu funkcije, da bo tangenta na graf funkcije v tej točki potekala skozi koordinatno izhodišče.

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$y = \frac{1 - \log a}{a^2} + \frac{2\log a - 3}{a^3}(x - a) \; 3$$

$$T(0,0): \quad 0 = \frac{1 - \log a}{a^2} + \left(\frac{2\log a - 3}{a^3}(0 - a)\right) \Longrightarrow -3\log a = -4$$

$$a = e^{\frac{4}{3}}$$

2

2. naloga (25 točk)

a) (10 točk) Z uporabo metode Per partes izračunaj nedoločeni integral

$$\int (2x+1)\cos x \, dx.$$

$$\begin{bmatrix} u = 2x+1 & du = 2dx \\ dv = \cos x \, dx & v = \sin x \end{bmatrix} = (2x+1)\sin x - 2\int \sin x \, dx =$$

5 3

$$= (2x+1)\sin x + 2\cos x + C$$

1 1

b) (15 točk) Z uvedbo primerne nove spremenljivke izračunaj določeni integral

$$\int_1^e \frac{\sin(\log x)\cos(\log x)}{x} dx.$$

$$\begin{bmatrix} u = \sin(\log x) \\ du = \dfrac{\cos(\log x)}{x} dx \end{bmatrix}$$ 5

$$\int_0^{\sin 1} u \, du = \frac{u^2}{2} \Big|_0^{\sin 1} =$$

4 3

$$= \frac{\sin^2(1)}{2} + \frac{0^2}{2} =$$

$$= \frac{\sin^2(1)}{2}$$ 3

ALI

$$\begin{bmatrix} u = \log x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{bmatrix}$$ 4

$2u = t$

$2du = dt$ 2

$$\int_0^1 \sin u \cdot \cos u \, du = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin 2u = \frac{1}{4}\int_0^2 \sin t \, dt$$

4 3 2

$$= \frac{1}{4}(-\cos 2 + \cos 0) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2)$$

2

OPOMBA: $\cos 2 = \cos^2 1 - \sin^2 1$

$1 = \cos^2 1 + \sin^2 1$

T.P.: $\frac{1}{4}(\cos^2 1 + \sin^2 1 - \cos^2 1 + \sin^2 1) = \frac{\sin^2 1}{2}$

3. naloga (25 točk)

Dane so točke $A(0,0,0)$, $B(-1,3,0)$, $C(5,-1,8)$, $D(2t,1,1-t)$.

a) (7 točk) Izračunaj ploščino ΔABC.

$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (-1,3,0) \quad 2$$
$$\vec{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (5,-1,8)$$

$$p_\Delta = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| \; 1 \; = \frac{1}{2}\left|\begin{bmatrix}-1\\3\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}5\\-1\\8\end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{bmatrix}24\\8\\-14\end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix}12\\4\\-7\end{bmatrix}\right| \; 2$$

$$\begin{matrix}-1 & & 5\\ 3 & & -1\end{matrix}$$

$$= \sqrt{12^2 + 4^2 + (-7)^2} = \sqrt{209} \quad 2$$

b) (7 točk) Določi vrednost parametra t tako, da bo premica AD oklepala enaka kota s premicama AB in AC.

$$\vec{AD} = (2t, 1, 1-t) \quad 1$$
$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} \quad 1$$
$$|\vec{AC}| = \sqrt{5^2+1^2+8^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \quad 1$$

$$\frac{\vec{AD}\cdot\vec{AB}}{\cancel{|\vec{AD}|}\,|\vec{AB}|} = \frac{\vec{AD}\cdot\vec{AC}}{\cancel{|\vec{AD}|}\cdot|\vec{AC}|} \quad 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}}(2t,1,1-t)\cdot(-1,3,0) = \frac{1}{3\sqrt{10}}(2t,1,1-t)\cdot(5,-1,8) \quad / \cdot 3\sqrt{10}$$

$$3(-2t+3) = 10t - 1 + 8 - 8t$$

$$2 = 8t$$
$$t = \frac{1}{4} \quad 2$$

c) (6 točk) Pri tako določenem parametru t določi prostornino piramide $ABCD$.

$$V = \frac{1}{6}\left|(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})\right| \; 1 \; = \frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}24\\8\\-14\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{3}{4}\end{bmatrix} \; 2 \; = \frac{1}{6}\left(12 + 8 - \frac{21}{2}\right) \; 2 \; = \frac{19}{12} \; 1$$

d) (5 točk) Ali lahko izberemo vrednost parametra t tako, da bodo točke A, B, C in D ležale na isti ravnini?

$$\vec{AB} \times \vec{AC} \parallel \vec{AD} \iff (\vec{AB} \times \vec{AC})\cdot\vec{AD} = 0 \quad 2$$

$$\begin{bmatrix}24\\8\\-14\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2t\\1\\1-t\end{bmatrix} = 48t + 8 - 14 + 14t \; 2 \; = 62t - 6 = 0$$

$$t = \frac{3}{31} \quad 1$$

4. naloga (25 točk)

Z Gassovo eliminacijo reši naslednji sistem:

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 1 \\ -x + 5y - 3z &= 2 \\ x + 4y &= 7 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 7 \end{array}\right] \overset{+}{} - \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right] \cdot 2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot 2$$

5 5 5

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x + 4y = 7 \Rightarrow x = 7 - 4y$

$3y - z = 3 \Rightarrow z = 3y - 3$ 5

$x = 7 - 4t$

$y = t$ 5 $t \in \mathbb{R}$

$z = 3t - 3$

ALI $x + 4y = 7$ $x = 7 - 4y = 7 - 4 \cdot \left(1 + \frac{z}{3}\right) = 3 - \frac{4}{3} z$

$3y - z = 3 \Rightarrow y = \frac{3 + z}{3}$

$x = 3 - \frac{4}{3} t$

$y = 1 + \frac{1}{3} t$ $t \in \mathbb{R}$

$z = t$