Fakulteta za računalništvo in informatiko, UL

Matematika, RI VS

Povzetki predavanj

D. Kobal

Kazalo

O številih

Naravna števila

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots, n, \ldots\}$$

lahko seštevamo in množimo.

Cela števila

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots, n, \ldots\}$$

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- Cela števila lahko seštevamo, odštevamo in množimo.
- ... vse možne razlike $n - m$, za $n, m \in \mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^-, \quad \mathbb{N}^- = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Racionalna števila

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid \text{ kjer } n, m \in \mathbb{Z} \text{ in } m \neq 0 \right\}$$

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- Vsako racionalno število lahko predstavimo kot *okrajšan ulomek* $\frac{x}{y}$, kjer $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}$, $y \neq 0$, in x in y nimata skupnih deliteljev.
- Racionalna števila lahko seštevamo, odštevamo, množimo in delimo, razen...
- Deljenje z 0 nima smisla.
- Več različnih ulomkov lahko predstavlja isto racionalno število: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$
- $\sqrt{2}$ ni racionalno število. $\sqrt{2}$ ni mogoče izraziti kot ulomek.

Realna števila

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\ldots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \ldots\}$$

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Realna števila poleg racionalnih vsebujejo še *iracionalna števila*.
- Realna števila lahko seštevamo, odštevamo, množimo in delimo, razen...
- Deljenje z 0 nima smisla.
- Realna števila lahko predstavimo kot točke na *številski premici*.
- Realna števila lahko zapišemo kot *neskončna decimalna števila*.
- Realna števila lahko zapišemo tudi z ulomki, na primer $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Različna decimalna števila lahko predstavljajo isto realno število:

$$1 = 0.\overline{9} = 0.999\ldots$$

- Periodični decimalni zapis predstavlja racionalno število (ulomek).

Primer 1

Pokažimo, kako poiščemo ulomek, ki pripada decimalnemu zapisu $0.\overline{3} = 0.3333\ldots$.

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0.\overline{3} \\ 10x & = & 3.\overline{3} \\ \hline 9x & = & 3 \qquad \Longrightarrow x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{array}$$

Primer 2

Pokažimo, kako poiščemo ulomek, ki pripada decimalnemu zapisu $0.\overline{4} = 0.4444\ldots$.

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0.\overline{4} \\ 10x & = & 4.\overline{4} \\ \hline 9x & = & 4 \qquad \Longrightarrow x = \frac{4}{9} \end{array}$$

Primer 3

Pokažimo, kako poiščemo ulomek, ki pripada decimalnemu zapisu $0.4\overline{6} = 0.46666\ldots$.

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0.4\overline{6} \\ 10x & = & 4.\overline{6} \\ 100x & = & 46.\overline{6} \\ \hline 90x & = & 42 \qquad \Longrightarrow x = \frac{42}{90} = \frac{7}{15} \end{array}$$

Številska premica in intervali

- Vsa števila lahko predstavimo - narišemo na številski premici.
- Posebej pomembne množice števil so intervali.
- Omejeni intervali ali daljice na številski premici:
  - $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ odprt interval
  - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ zaprt interval
  - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ in
    $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ polodprta ali polzaprta intervala
- Neomejeni intervali ali poltraki na številski premici:
  - $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ odprt navzgor neomejen interval
  - $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ odprt navzdol neomejen interval
  - $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ zaprt navzgor neomejen interval
  - $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ zaprt navzdol neomejen interval
- ∞ ni število...

Odstotki - procenti

- Različne situacije v katerih imamo opravka z deleži najlepše opišemo in razumemo s pomočjo procentov. Ko imamo v mislih delež $\frac{p}{100}$ neke celote, rečemo p % (dane celote).
- Če se je izdelek s ceno C podražil za p %, se je podražil **za** $C \cdot \frac{p}{100}$ in bo **končna cena** enaka $C \cdot (1 + \frac{p}{100})$.
- Če se je izdelek s ceno C podražil za 3 %, se je podražil **za** $C \cdot 0.03$ in bo **končna cena** enaka $C \cdot (1.03)$.
- Faktorju $r = 1 + \frac{p}{100}$ rečemo **obrestovalni faktor**. Obrestovalni faktor pri p % podražitvi je $1 + \frac{p}{100}$. Obrestovalni faktor pri p % pocenitvi je $1 - \frac{p}{100}$.

Primer 1

Izdelek se najprej podraži za 10 %, nato se poceni za 10 %. Kolikšna je končna cena glede na začetno?

- Obrestovalni faktor 10 % podražitve je 1.1.
- Obrestovalni faktor 10 % pocenitve je 0.9.
- Končna cena izdelka bo zato $C \cdot 1.1 \cdot 0.9 = C \cdot 0.99$, kar pomeni, da se je izdelek skupno pocenil za 1 %.

Primer 2

Kdaj bomo dobili višjo končno ceno, če se izdelek najprej podraži za 5 % in nato še za 3 %, ali če se najprej podraži za 3 % in nato še za 5 %?

- Obrestovalni faktor 5 % podražitve je 1.05.
- Obrestovalni faktor 3 % podražitve je 1.03.
- V prvem primeru bo končna cena $C \cdot 1.05 \cdot 1.03$, v drugem primeru pa $C \cdot 1.03 \cdot 1.05$, kar je očitno isto. Torej bo končna cena v obeh primerih enaka.

Ponovimo (odstotki): Primer 3

Vrednost delnice se je v zadnjih šestih mesecih vsak mesec spremenila zaporedoma za: $+2$ %, $+2.3$ %, $+1.4$ %, -1.8 %, -2.1 %, -1.9 %. Je v pol leta vrednost delnice narasla ali padla?

- Zaporedni mesečni obrestovalni faktorji za vrednost delnice so torej $1.02, 1.023, 1.014, 0.982, 0.979, 0.981$.
- Če je bila V začetna vrednost delnice, bo končna vrednost torej enaka produktu $V \cdot 1.02 \cdot 1.023 \cdot 1.014 \cdot 0.982 \cdot 0.979 \cdot 0.981 \approx V \cdot 0.9979$, kar pomeni, da se je vrednost delnice skupno znižala za 0.21 % .

Primer 4

Zmešamo 2 litra 10%, 4 litre 15% in 6 litrov 12% mešanice. Koliko odstotno mešanico dobimo?

- Razmerje npr. $\frac{\text{alkohol}}{\text{alkohol+voda}} : \frac{2\times0.1+4\times0.15+6\times0.12}{2+4+6} = 0.13 \longrightarrow 13\%$

Primer 5

Kolikšne obresti ima Bill Gates od 1 000 000 000 EUR pri 4% letni obrestni meri v enem letu? Kolikšne v enem dnevu? V eni sekundi?

- $r_l = 1.04, \quad r_d = \sqrt[365]{1.04} = 1.000\,107\,459\,782\,\ldots,$
  $r_s = \sqrt[365\cdot24\cdot3\,600]{1.04} = 1.000\,000\,001\,244\,\ldots$
- $G = 1\,000\,000\,000$ EUR, $\;G_l = 1\,040\,000\,000$ EUR, $\;G_d = 1\,000\,107\,459.78$ EUR, $G_s = 1\,000\,000\,001.24$ EUR

Absolutna vrednost

Absolutna vrednost $|x|$ števila $x \in \mathbb{R}$ je razdalja števila x od števila 0 na številski premici in je enaka

$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Razdalja med številoma x in y je enaka $|x - y|$.

- Dinamične ilustracije: https://www.geogebra.org/m/pgxp7m7u in https://www.geogebra.org/m/UEXHvvRk v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

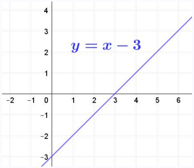
Osnovne lastnosti:

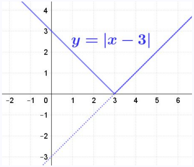
- $|x| \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$
- $|xy| = |x||y|$
- *trikotniška neenakost*: $|x + y| \leq |x| + |y|$

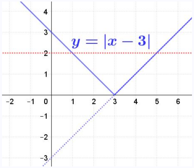
Absolutna vrednost geometrijsko

Določimo množico realnih števil, x, za katere velja $|x-3| \leq 2$.

- Način 1: To so vsa števila, ki so od 3 oddaljena manj ali enako 2. Če si to narišemo na številsko premico, je očitno, da je $x \in [1, 5]$.
- Način 2: Zaporedoma obravnavamo skice







in ugotovimo, da je $|x-3| \leq 2$ za $x \in [1, 5]$.

Naloge

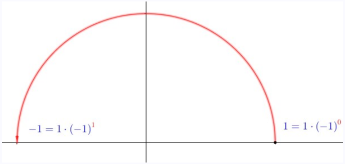
- Določimo množico realnih števil, x, za katere velja $|x-3| = |x+1|$.
- Določimo množico realnih števil, x, za katere velja $||x-2|-2| < 1$.
- Določimo množico točk (x, y) v ravnini, za katere velja $|x| + |y| < 1$.

Kompleksna števila so ‘kompleksna’ števila ali tudi ‘dvodimenzionalna števila’ s katerimi lahko uspešno računamo v ravnini.

Na $\mathbb{R}$ osi velja

$$1 = 1 \cdot (-1)^{0} \quad \text{in} \quad -1 = 1 \cdot (-1)^{1}$$

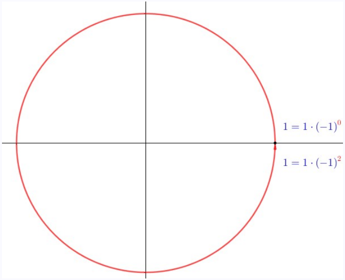
pri čemer nam rdeča potenca šteje kolikokrat smo število 1 zavrteli okrog izhodišča za 180^o v pozitivni smeri.



Tudi pomen dvakratnega vrtenje okrog izhodišča za 180^o v pozitivni smeri se ujema s preprosto enačbo

$$1 = 1 \cdot (-1)^{2}$$

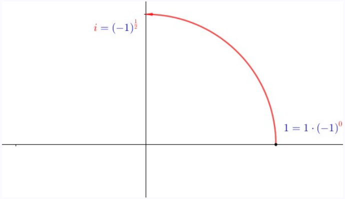
in enako velja za vse cele potence $1 \cdot (-1)^n$.



Če

$$1 \cdot (-1)^{\frac{1}{2}}$$

interpretiramo kot rotacijo števila 1 za polovico od 180^o, torej za 90^o okrog izhodišča v pozitivni smeri in to število označimo kot imaginarno enoto

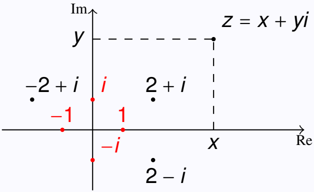


$$i = \sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}} \quad \longrightarrow \quad i^2 = -1$$

dobimo novo in zelo uporabno teorijo kompleksnih števil, ki omogoča računanje v ravnini.

Kompleksno število $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, ima

- $x = \mathrm{Re}\,(z)$ **realni del**
- $y = \mathrm{Im}\,(z)$ **imaginarni del**



Oznaka za množico kompleksnih števil : $\mathbb{C}$

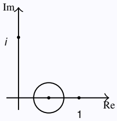
Absolutna vrednost

Absolutna vrednost kompleksnega števila z

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

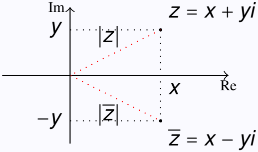
podobno kot pri realnih številih pomeni razdaljo števila od izhodišča.

- Absolutna vrednost razlike dveh kompleksnih števil pomeni razdaljo med številoma. Enačbo $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$ rešijo vsa števila $z \in \mathbb{C}$, ki ležijo na krožnici s središčem v $\frac{1}{2}$ in radijem $\frac{1}{4}$.



Računanje v $\mathbb{C}$

- Konjugiranje:



$\overline{x + yi} = x - yi$ je **konjugirano število**.
Primer: $\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$.

- Seštevanje in odštevanje: $(x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)i$
  Primer: $(3 + 2i) + (1 - i) = (3 + 1) + (2 - 1)i = 4 + i$
- Množenje: $(x + yi)(u + vi) = (xu - yv) + (xv + yu)i$
  Primer: $(3 + 2i)(1 - i) = 3 + 2i - 3i - 2i^2 = 3 - i - 2(-1) = 5 - i$

- Deljenje?

  Opazimo na primer: $(3+2i)(3-2i) = 9+6i-6i+4 = 13 = |3+2i|^2 \in \mathbb{R}$

  V splošnem: $\mathbf{z} \cdot \overline{\mathbf{z}} = |\mathbf{z}|^{\mathbf{2}} \in \mathbb{R}$

  Od tu dobimo formulo za deljenje: $\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{w}} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{\mathbf{z} \cdot \overline{\mathbf{w}}}{|\mathbf{w}|^{\mathbf{2}}}$

  Primer 1: $\frac{3-2i}{1+i} = \frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

  Primer 2: $\frac{5+i}{2+3i} = \frac{(5+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{13-13i}{13} = 1-i$

Nekatere lastnosti

- Dve kompleksni števili sta enaki, kadar imata enaka realna in imaginarna dela.
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\, z, \quad z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|z+w| \leq |z| + |w|$ (**trikotniška neenakost**)

Primeri

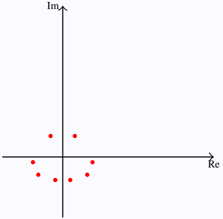
Izračunajmo

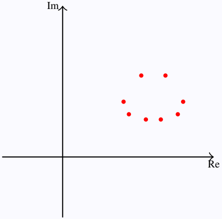
- $(1-i)^2$
- $\frac{1-i}{1+i}$
- $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2016}$

Opišimo množico kompleksnih števil $z \in \mathbb{C}$, za katere velja

- $2z + 6i = 8$
- $z + \bar{z} = 5$
- $zi + 1 - i = 2(z - i)$
- $|z - 1 - i|^2 = 2$
- $|z - 3 + 2i| = 4$
- $|z + i| < |z - 1|$
- $|z - 1| + |z + 1| = 4$

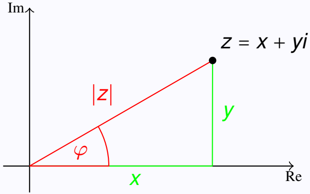
Geometrijski primer - pomen





$$z \quad \mapsto \quad z + (3 + 2i)$$

Polarni zapis kompleksnega števila



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$x = |z| \cos \varphi \quad \text{in} \quad y = |z| \sin \varphi$$

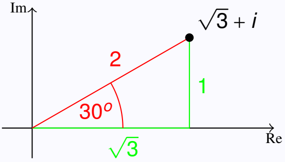
$$z = x + iy = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

Kompleksno število $z = x + iy$ zapišemo v **polarnem zapisu** kot

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

$\varphi = \mathrm{Arg}(z)$ imenujemo **polarni kot** ali **argument**. Argument je določen samo do mnogokratnika celega kota $2\pi^{rd} = 360^o$ natanko.

Primer



$2 = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}$ in $30^o = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{3} = 2\cos 30^o$ in $1 = 2\sin 30^o$

$\sqrt{3} + i = 2 \cdot (\cos 30^o + i \sin 30^o) = 2 \cdot e^{i \cdot 30^o}$

Zakaj polarni zapis?

- Izračunamo produkt $(x+yi)\cdot(u+vi) = xu - yv + (yu + xv)i$.
- Izračunamo produkt

$$
\begin{aligned}
& [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] \cdot [q(\cos\psi + i\sin\psi)] = \\
= \quad & r\cdot q(\cos\varphi\cdot\cos\psi - \sin\varphi\cdot\sin\psi) + (\cos\varphi\cdot\sin\psi + \sin\varphi\cdot\cos\psi)i = \\
= \quad & r\cdot q[\cos(\varphi+\psi) + \sin(\varphi+\psi)i]
\end{aligned}
$$

Torej

$$
\begin{aligned}
& r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot q(\cos\psi + i\sin\psi) = \\
= \quad & \underbrace{r\cdot q}_{\textit{produkt absolutnih vrednosti}} \left(\cos \underbrace{(\varphi+\psi)}_{\textit{vsota kotov}} + i\sin \underbrace{(\varphi+\psi)}_{\textit{vsota kotov}}\right)
\end{aligned}
$$

- Dinamična ilustracija: https://www.geogebra.org/m/vthctagb v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

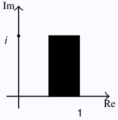
Računanje v polarni obliki

- Eulerjev zapis: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
- Polarni zapis se poenostavi: $z = |z|e^{i\varphi}$.
- Števila $z = e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}$ so na **enotski krožnici** $|z| = 1$.
- Množenje se poenostavi: $z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
  - Množenje: absolutni vrednosti se zmnožita, argumenta se seštejeta.
  - Potenciranje: $z = |z|e^{i\varphi} \longrightarrow z^n = |z|^n e^{i\varphi n}$ (**de Moivrova formula**)
  - Korenjenje: $z = |z|e^{i\varphi} \longrightarrow z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi}{n}}$ (**de Moivrova formula**)
- Velja:
  - $\bar{z} = |z|e^{-i\varphi}$,
  - $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|}e^{-i\varphi}$
  - $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
- Dinamična ilustracija: https://www.geogebra.org/m/nmymchxk v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

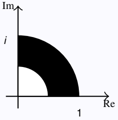
Primeri

- Zapišimo v polarni obliki števila $1, -1, i, -i, 1+i, -1-i$.

- Zapišimo množici:



$\{x + iy; 0.5 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

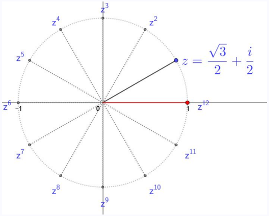


$\{re^{i\varphi}; 0.5 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\}$

Primeri

- Izračunajmo $(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{12}$

$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1 \cdot (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin(\frac{\pi}{6}))$



in zato $z^{12} = 1^{12} \cdot (\cos\frac{12\pi}{6} + i\sin(\frac{12\pi}{6})) = 1 \cdot (\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 1.$

Koreni kompleksnega števila

***n*-ti koreni** števila $a \in \mathbb{C}$ so rešitve enačbe $z^n = a$.

- Enačbo zapišemo v polarni obliki: $a = |a| \cdot e^{i\varphi}$.
- Dobimo n različnih rešitev

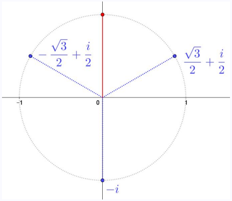
$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots n-1$$

- Rešitve ležijo na ogliščih pravilnega *n*-kotnika v kompleksni ravnini.

Primer 1

Katera števila ustrezajo enačbi $z^3 = i$?

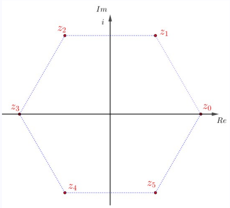
- Velja $i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{2})$
- Velja tudi
  $i = \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- Zato
  $z = i^{\frac{1}{3}} = \cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}), k \in \mathbb{Z}$.
- Izračunamo rešitve
  - $k = 0 : z_0 = \cos(\frac{\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$
  - $k = 1 : z_1 = \cos(\frac{5\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$
  - $k = 2 : z_2 = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{3\pi}{2}) = -i$



Primer 2

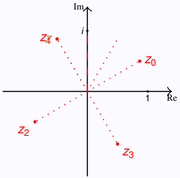
Katera števila $z \in \mathbb{C}$ ustrezajo enačbi $z^6 = 1$.

- Velja $1 = \cos(0) + i \cdot \sin(0)$
- Velja tudi $1 = \cos(2k\pi) + i \cdot \sin(2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- Zato $z = 1^{\frac{1}{6}} = \cos(\frac{2k\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{2k\pi}{6}), k \in \mathbb{Z}$.
- Izračunamo rešitve
  - $k = 0 : z_0 = \cos(0) + i \cdot \sin(0) = 1$
  - $k = 1 : z_1 = \cos(\frac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - $k = 2 : z_2 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - $k = 3 : z_3 = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1$
  - $k = 4 : z_4 = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - $k = 5 : z_5 = \cos(\frac{5\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



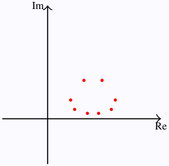
Primer 3

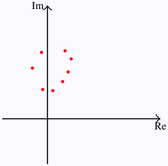
- Poiščimo in narišimo vse $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $2z^4 + 1 = \sqrt{3}i$.
  - Zapišemo
    $z^4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
  - Zato $z = 1^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right)\right), k \in \mathbb{Z}$.
  - Izračunamo rešitve
    - $k = 0 : z_0 = \cos(\frac{\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$
    - $k = 1 : z_1 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
    - $k = 2 : z_2 = \cos(\frac{7\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$
    - $k = 3 : z_3 = \cos(\frac{5\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



- Dinamična ilustracija: https://www.geogebra.org/m/kcqjnmv7 v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs
- Polarna oblika je še posebej koristna pri množenju, potenciranju in korenjenju.

- Vizualizirajmo $z \longrightarrow ze^{i\frac{\pi}{3}}$





Geometrija osnovnih operacij v kompleksni ravnini

$$w = |w|e^{i\varphi}$$

Preslikava	transformacija v $\mathbb{C}$
$z \mapsto z + w$	premik za w
$z \mapsto e^{i\varphi} z$	zasuk okrog izhodišča za kot φ
$z \mapsto w \cdot z$	razteg (ali krčenje) za $\|w\|$ in zasuk za φ

Zanimiv problem

‘Čuden stric’ vam zapusti veliko bogastvo - zaklad, ki ga je skrbno skril ... Samo vi poznate načrt/mesto, kjer se zaklad nahaja. Poleg načrta vam je poslal tudi razlago : "Na otoku, ki ga poznaš pristanem s čolnom. Na otoku sta samo (en) kaktus in (ena) palma. Od čolna grem do palme in štejem korake. Pri palmi se obrnem za 90^o proti kaktusu in naredim enako število korakov kot od čolna do palme. V pesku označim mesto. Vrnem se do čolna in štejem korake do kaktusa. Obrnem se za 90^o proti palmi in naredim enako korakov kot od čolna do kaktusa. V pesku si označim mesto. Točno na sredini med obema označenima mestoma zakopljem zaklad. Srečno!"

Zaporedja

Kot pove že beseda v 'naravnem jeziku', je zaporedje neka urejena množica 'zaporedoma' postavljenih elementov. Pri matematiki bomo obravnavali zaporedja števil.

Zaporedje je torej množica 'zaporedoma postavljenih' števil. Matematično natančneje rečemo, da je zaporedje preslikava

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

ki vsakemu naravnemu številu i (indeksu) priredi točno določeno realno število a_i. Pri tem je imenujemo i indeks, a_i pa i-ti člen zaporedja.

Opisi, predstavitve zaporedij

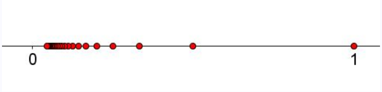
- Z naštevanjem: $1, 2, 4, 8, \ldots$
- Opisno: 'Vsa soda števila'
- Eksplicitno: $a_n = \frac{1}{n}$ za $n \geq 1$.

  Opazimo, da je zaporedje podano exsplicitno z izrazom $a_n = f(n)$ in neko točno določeno funkcijo $f(x)$.
- Rekurzivno: $a_0 = 1$ in $a_{n+1} = 2a_n$ za $n \geq 0$

  Opazimo, da je zaporedje podano s prvim členom a_0 ali a_1 in neko točno določeno funkcijo $f(x)$, ki pove, kako iz a_n dobimo a_{n+1}.

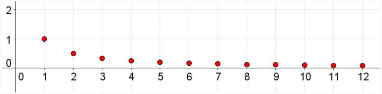
Geometrijski prikaz zaporedja

- Zaporedje lahko predstavimo kot vrednosti na številski premici:



Zaporedne člene zaporedja nakazujemo z zaporednim risanjem točk. Ko smo zaporedje narisali, se ne vidi več, ‘zaporednosti’ členov. Npr. iz slike ne moremo vedeti, kateri člen je tretji in kateri četrti.

- Zaporedje lahko predstavimo kot točke (n, a_n) v ravnini:



‘Abscisa’ ali x-koordinata točke pove kateri člen zaporedja je enak ‘ordinati’ ali y-koordinati.

- Dinamična ilustracija: https://ggbm.at/hakzxd8b v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

Primer 1

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}$$

- Izpišemo nekaj členov: $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \ldots$
- Opazujemo, analiziramo, opišemo

Primer 2

Aritmetično zaporedje

- Intuitivni opis: Začnemo z neko vrednostjo. 'Delamo' enako dolge korake v desno.
- Eksplicitni opis: $a_n = a + nd$
- Rekurzivni opis: $a_0 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$
- Primer: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
- Primer: $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$
- Primer: $1, 1+\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3}, 1+3\sqrt{3}, 1+4\sqrt{3}, \ldots$

Primer 3

Geometrijsko zaporedje

- Intuitivni opis: Začnemo z neko vrednostjo. V vsakem koraku prejšnjo vrednost pomnožimo z istim faktorjem.
- Eksplicitni opis: $a_n = aq^n$
- Rekurzivni opis: $a_0 = a$, $a_{n+1} = a_n q$
- Primer: $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$
- Primer: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$
- Primer: $1, \sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \ldots$

Primer 4

Fibonaccijevo zaporedje

- Rekurzivni opis: $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$
- Izračun členov: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$
- Dinamična ilustracija: https://www.geogebra.org/m/zeaq8cdc V https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

Lastnosti zaporedij

- **Naraščajoče** zaporedje: $a_n \leq a_{n+1}$ za vse $n \in \mathbb{N}$;
- **Strogo naraščajoče** zaporedje: $a_n < a_{n+1}$ za vse $n \in \mathbb{N}$;
- **Padajoče** zaporedje: $a_n \geq a_{n+1}$ za vse $n \in \mathbb{N}$;
- **Strogo padajoče** zaporedje:
  $a_n > a_{n+1}$ za vse $n \in \mathbb{N}$;
- **Navzgor omejeno** zaporedje:
  Obstaja zgornja meja $M \in \mathbb{R}$, da velja $a_n \leq M$ za vse $n \in \mathbb{N}$.
- **Navzdol omejeno** zaporedje:
  Obstaja spodnja meja $m \in \mathbb{R}$, da velja $m \leq a_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$.
- **Navzgor in navzdol omejeno** zaporedje:
  Obstajata meji $m, M \in \mathbb{R}$, da velja $m \leq a_n \leq M$ za vse $n \in \mathbb{N}$.

Primer 1

Naraščajoča zaporedja

- $a_n = n$
- $b_n = n + \frac{1}{n}$
- $c_n = 1 - \frac{1}{n}$
- $d_n = -\frac{1}{n}$
- $\{1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7 \dots\}$

Primer 2

Strogo naraščajoča zaporedja

- $a_n = n$
- $b_n = n + \frac{1}{n}$
- $c_n = 1 - \frac{1}{n}$
- $d_n = -\frac{1}{n}$
- $\{1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7 \dots\}$ je naraščajoče, **NI** pa strogo naraščajoče.

Primer 3

Padajoča zaporedja

- $a_n = 1 - n$
- $b_n = \frac{1}{n} - n$
- $c_n = 1 + \frac{1}{n}$
- $\{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\}$

Primer 4

Strogo padajoča zaporedja

- $a_n = 1 - n$
- $b_n = \frac{1}{n} - n$
- $c_n = 1 + \frac{1}{n}$
- $\{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\}$ je padajoče, **NI** pa strogo padajoče.

Primer 5

Navzgor omejeno zaporedje

- $a_n = 1 - n$
- $b_n = 1 - \frac{1}{n}$
- $c_n = 1 + \frac{1}{n}$

Primer 6

Navzdol omejeno zaporedje

- $a_n = 1 + n$
- $b_n = 1 - \frac{1}{n}$
- $c_n = 1 + \frac{1}{n}$

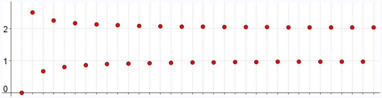
Primer 7

Navzgor in navzdol omejeno zaporedje

- $a_n = 1 - \frac{1}{n}$
- $b_n = 1 + \frac{1}{n}$

Stekališče zaporedja

- Intuitivno: **Stekališče** zaporedja je število k kateremu se 'steka' neskončno členov zaporedja.
- Natančneje povedano: **Stekališče** zaporedja je tako število, da je v vsaki njegovi okolici neskončno členov zaporedja.
- Zaporedje ima lahko več stekališč (na sliki so členi zaporedja z dvema stekališčema predstavljeni kot točke v ravnini (n, a_n)):



Primer takega zaporedja je na primer $a_n = \frac{3}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n+2}{2n}$. Vizualizacija https://www.geogebra.org/m/hakzxd8b

Limita zaporedja

Limita zaporedja je tako število, da je v vsaki njegovi okolici neskončno členov, zunaj te okolice pa končno členov zaporedja.

- Lahko rečemo tudi: **Limita** zaporedja a_n je tako število L, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks $N \in \mathbb{N}$, da velja $|L - a_n| < \varepsilon$ za vse $n \geq N$.
- Limito zaporedja a_n označimo $\lim_{n \to \infty} a_n$.
- Zaporedje ima lahko več stekališč. Če ima zaporedje več stekališč, **nima** limite.
- Zaporedje ima lahko tudi eno samo stekališče, pa vseeno to stekališče ni nujno limita.
- Limita zaporedja je stekališče. Obratno pa ni nujno res.

Konvergentno zaporedje

Zaporedje je **konvergentno**, če ima limito. Sicer je **divergentno**.

- Naraščajoče in navzgor omejeno zaporedje je konvergentno.
- Padajoče in navzdol omejeno zaporedje je konvergentno.

Računanje limit

Če je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ in $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ potem velja:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = ab$
3. če je $b_n \neq 0$ za vsak n in $b \neq 0$, je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.
4. če je $a_n > 0$ za vsak n in $a > 0$, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$.

Primer 1

$a_n = 1, b_n = \frac{1}{n} \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$

Primer 2

$a_n = 3, b_n = \frac{1}{n} \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (3\frac{1}{n}) = 0$

Primer 3

Radi bi izračunali $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{3n^2+n+1}$. Najprej poračunamo

$$\frac{(n+2)^2}{3n^2+n+1} = \frac{n^2+4n+4}{3n^2+n+1} = \frac{1+4\frac{1}{n}+4\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

Vzamemo $a_n = 1 + 4\frac{1}{n} + 4\frac{1}{n^2}$ in $b_n = 3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$.

Ker je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ in $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$, izračunamo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{3n^2+n+1} = \frac{1}{3}$.

Primer 4

Radi bi izračunali $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$.

Zapišemo $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}}$. Ker je $\lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$ in $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 2^0 = 1.$$

Izrek 'o sendivču'

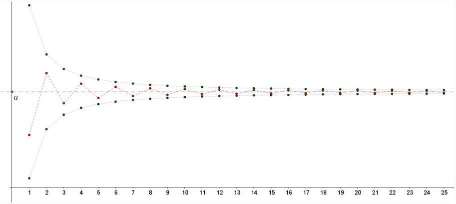
Če za vsak n velja $a_n \leq b_n \leq c_n$ in $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, je tudi

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Grafični prikaz

Vizualizacija:

https://www.geogebra.org/m/dwzvubrx



Primer

Izračunajmo $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} =$

$$\begin{array}{ccccc}
-1 & \leq & \sin n & \leq & 1 \\
\frac{-1}{n} & \leq & \frac{\sin n}{n} & \leq & \frac{1}{n} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} & \leq & \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} & \leq & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\
0 & \leq & \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} & \leq & 0
\end{array}$$

Primeri zaporedij

- $a_n = (-1)^n$ .... $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ ne obstaja.
- $a_n = 0.\underbrace{333\ldots3}_{n}$ .... $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$
- $a_n = \frac{1}{n^2}$ .... $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- $a_n = \frac{(1-n)^3}{1+2n^2+3n^3}$ .... $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1-n)^3}{1+2n^2+3n^3} = -\frac{1}{3}$
- ${}^*a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ .... $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828\ldots$
- ${}^*a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ .... $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e = 2,71828\ldots$
- ${}^*a_n = \sqrt[n]{n}$ .... $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Vrste

Še o zaporedjih

Zaporedja števil že poznamo. Na primer

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

je zaporedje, ki ga krajše in točneje zapišemo kot $a_n = n$. Zaporedja so lahko končna ali neskončna. Še posebej ko zapišemo zaporedje s splošnim členom, imamo v mislih neskončno zaporedje. Zaporedje je pa seveda lahko tudi končno. Ponovimo, pri zaporedjih smo znali obravnavati

- naraščanje in strogo naraščanje
- padanje in strogo padanje
- omejenost, omejenost navzgor in omejenost navzdol
- stekališča
- limite (konvergentnost in divergentnost)

Zapišimo nekaj zaporedij s splošnim členom in nakažimo pripadajoče končno zaporedje 5-ih členov ter ustrezno neskončno zaporedje:

splošni člen	zaporedje 5-ih členov	neskončno zaporedje
$a_n = n$	$1, 2, 3, 4, 5$	$1, 2, 3, \ldots$
$a_n = (-1)^n$	$-1, 1, -1, 1, -1$	$-1, 1, -1, \ldots$
$a_n = \frac{1}{n}$	$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$	$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$
$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$	$\frac{1}{2^0}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2} \ldots$

Precej očitni so naslednji razmisleki:

- O naraščanju in padanju lahko govorimo tako pri končnih kot pri neskončnih zaporedijih. Za zgornja zaporedja hitro ugotovimo, da je prvo naraščajoče in strogo naraščajoče. Drugo ni niti naraščajoče niti padajoče. Tretje je padajoče in strogo padajoče. Prav tako je četrto zaporedje padajoče in strogo padajoče.

splošni člen	zaporedje 5-ih členov	neskončno zaporedje
$a_n = n$	$1, 2, 3, 4, 5$	$1, 2, 3, \ldots$
$a_n = (-1)^n$	$-1, 1, -1, 1, -1$	$-1, 1, -1, \ldots$
$a_n = \frac{1}{n}$	$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$	$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots$
$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$	$\frac{1}{2^0}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2} \cdots$

- O omejenosti lahko govorimo tako pri končnih kot pri neskončnih zaporedjih. Seveda so vsa končna zaporedja omejena. (Razmislimo zakaj!) Za neskončna zaporedja pa je razmislek o omejenosti lahko bolj zapleten. Razmislimo da za zgornja neskončna zaporedja velja naslednje: Prvo je omejeno navzdol, ni pa omejeno navzgor. Drugo je omejeno (navzgor in navzdol). Prav tako sta tretje in četrto zaporedje omejeni (navzgor in navzdol).
- Pri končnih zaporedjih je nesmiselno govoriti o stekališčih, oziroma, končno zaporedje gotovo nima stekališč. Za zgornja neskončna zaporedja velja: Prvo nima stekališč. Drugo ima dve stekališči in sicer 1 in -1. Tretje ima eno stekališče in sicer 0. Prav tako je 0 stekališče četrtega zaporedja.

splošni člen	zaporedje 5-ih členov	neskončno zaporedje
$a_n = n$	$1, 2, 3, 4, 5$	$1, 2, 3, \ldots$
$a_n = (-1)^n$	$-1, 1, -1, 1, -1$	$-1, 1, -1, \ldots$
$a_n = \frac{1}{n}$	$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$	$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots$
$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$	$\frac{1}{2^0}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2} \cdots$

- Pri končnih zaporedjih je nesmiselno govoriti o limitah, oziroma, končno zaporedje gotovo nima limite. Za zgornja neskončna zaporedja velja: Prvo nima limite. To bi lahko sklepali že iz dejstva, da nima stekališč. Drugo nima limite. Tudi to bi lahko sklepali iz dejstva, da ima zaporedje dve stekališči. Tretje ima limito 0. Prav tako je 0 limita četrtega zaporedja.

Vrste

Kaj je **vrsta**?

Vrsto lahko razumemo (oziroma je v matematiki definiramo) kot vsoto členov zaporedja. Intuitivno si vrsto predstavljamo kot zapis, kjer smo 'v zaporedju vejice zamenjali s plusi'. V primeru zgornjih štirih, oziroma osmih zaporedij, bomo, če vejice zamenjamo s plusi, dobili

splošni člen	vrsta 5-ih členov	neskončna vrsta
$a_n = n$	$1+2+3+4+5$	$1+2+3+\dots$
$a_n = (-1)^n$	$-1+1-1+1-1$	$-1+1-1+\dots$
$a_n = \frac{1}{n}$	$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$	$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$
$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\dots$

Iz končnih zaporedij tako dobimo **končne vrste** (ali v tem primeru upravičeno rečemo kar vsote), ki jih vedno lahko izračunamo.

V zgornjih štirih primerih bi tako vsote (končne vrste) zaporedoma izračunali

$$1+2+3+4+5=15$$

$$-1+1-1+1-1=-1$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{137}{60}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{31}{16}$$

Pri neskončnih vrstah so pa stvari bolj zapletene in tudi bolj zanimive. Dobesedno o vsoti neskončno mnogo členov ne moremo govoriti, saj je nemogoče dejansko sešteti neskončno členov.

Preden natančneje pogledamo, kaj **neskončna vrsta** sploh pomeni, si na zgornjih štirih primerih oglejmo intuitiven pomen 'neskončnega seštevanja'.

Intuitivni pogled na neskončno vrsto

- Kaj bi $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$ sploh lahko pomenilo? Očitno je, da z dodajanjem (seštevanjem) vedno večjih zaporednih števil ta 'skupna vsota' postaja vse večja, oziroma, da so vsote, ki jih tako dobivamo neomejene. Smiselno bo torej reči, da v takem primeru neskončne vsote ni mogoče smiselno izračunati, oziroma, da vsota ne obstaja. Vsoto si lahko predstavljamo kot potovanje v desno na način, da je vsak korak še daljši od prejšnjega. Neobstoj vsote si lahko predstavljamo kot neomejenost potovanja v desno.
- Kaj pa $-1 + 1 - 1 + \dots$? Če tu razmišljamo, da bi vsoto začeli računati z zaporednim dodajanjem členov, bi izmenoma dobili vsoto -1 in 0. Če seštejemo pet členov dobimo -1, če seštejemo šest členov dobimo 0, če seštejemo sedem členov dobimo spet -1, ..., če seštejemo 131 členov dobimo -1, če seštejemo 132 členov dobimo 0 in tako naprej. Na drugačen način kot v prejšnjem primeru, a spet se zdi, da je to neskončno vsoto nemogoče izračunati, oziroma, da ne obstaja. Vsoto si lahko predstavljamo kot potovanje, kjer naredimo en korak v desno in naslednjega v levo. Neobstoj vsote si lahko predstavljamo kot neskončno spreminjanje lege.

- Primer $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$ je spet povsem drugačen in bomo videli pozneje, tudi zapleten. Z vsakim prištetim številom sicer vsoto povečamo, a dodajamo vse manjša števila in ni čisto jasno, kaj to pomeni. Vsoto si lahko predstavljamo kot neskončno potovanje v desno, pri čemer so naši koraki sicer vse krajši, a vseeno nikakor ni jasno, kako daleč uspemo priti.
- Primer $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ je poučen in intuitivno poveden. Tu lahko zaporedno prištevanje členov razumemo na sledeči način. S prvim členom smo pri 1 torej na polovici poti med 0 in 2. Ko dodamo $\frac{1}{2}$, smo razdaljo do 2 še razpolovili. Ko dodamo še $\frac{1}{4}$, smo preostanek poti do 2 ponovno razpolovili in tako naprej v neskončnost. Tu postane pomen te vsote precej drugačen in intuitivno jasen. Očitno je, da se vse bolj približujemo številu 2. Dlje kot seštevamo, bližje smo 2 (skica spodaj). V tem primeru bo torej smiselno reči, da ta neskončna vsota (**neskončna vrsta**) obstaja in je enaka 2.

Intuitivno pomen te (geometrijske) vrste lepo ponazori dinamična vizualizacija https://ggbm.at/xruhpnuw v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs.

Definicija (končne) vrste

Vrsta je lahko končna vsota členov:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k,$$

ki jo zapišemo krajše s sumacijskim znakom

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Primer 1

- Za $a_i = i$ lahko zapišemo:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{i=1}^{5} i = 15$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = \sum_{i=1}^{100} i = 5\,050$$

Primer 2

- Za $a_i = \frac{1}{i}$ lahko zapišemo:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i} = \frac{137}{60} \doteq 2.2833$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{77} = \sum_{i=1}^{77} \frac{1}{i} \doteq 4.9275$$

Definicija (neskončne) vrste

(Neskončna) **vrsta** je simbolična vsota

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

ki jo zapišemo krajše s sumacijskim znakom

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

Njena vrednost je določena z **limito**

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

ali s sumacijskim znakom

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Za neskončno vrsto $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$, rečemo, da je

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

n-ta delna vsota te vrste. Vrednost neskončne vrste torej definiramo kot **limito njenih delnih vsot**.

Vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je **konvergentna**, če je konvergentno zaporedje delnih vsot $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Vrsta je torej konvergentna, če lahko smiselno govorimo o njeni vsoti. Vrsta, ki ni konvergentna, je **divergentna**.

Geometrijska vrsta

Spomnimo se produkta vsote in razlike in množenja polinomov/izrazov.

$$
\begin{aligned}
(1-x)(1+x) &= 1-x^2 \\
(1-x)(1+x+x^2) &= 1-x^3 \\
(1-x)(1+x+x^2+x^3) &= 1-x^4 \\
\ldots & \\
(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) &= 1-x^{n+1}
\end{aligned}
$$

Od tu dobimo formulo

$$1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Spomnimo se, da je

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^n, \dots$$

geometrijsko zaporedje z začetnim členom a in količnikom q. Končni vsoti

$$\sum_{i=0}^{n} aq^i = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n$$

bomo zato rekli (končna) geometrijska vrsta. Iz zgornje formule takoj dobimo

$$\sum_{i=0}^{n} aq^i = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Neskončni vsoti

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} aq^i$$

bomo rekli (neskončna) geometrijska vrsta. Po definiciji (neskončne) vrste je zato

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} aq^i &= \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=0}^{n} aq^i = \\
&= \lim_{n\to\infty}(a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n) = \\
&= a \cdot \lim_{n\to\infty}(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) = \quad \text{in po prejšnji formuli} \\
&= a \cdot \lim_{n\to\infty} \tfrac{1-q^{n+1}}{1-q}
\end{aligned}$$

Geometrijska vrsta - nadaljevanje

Ker je

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{za } |q| < 1 \\ \infty & \text{za } |q| > 1 \end{cases}$$

dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & \text{za } |q| < 1 \\ \text{ne obstaja} & \text{za } |q| \geq 1 \end{cases}$$

Torej za vsoto (neskončne) geometrijske vrste velja

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = \begin{cases} \frac{a}{1-q}, & \text{za } |q| < 1 \\ \text{ne obstaja} & \text{za } |q| \geq 1 \end{cases}$$

Primer 1

Za $a = 1$ in $q = \frac{1}{2}$ in ker je $|\frac{1}{2}| < 1$, dobimo konvergentno vrsto

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

katere vsota se ujema s četrtim primerom 'intuitivne obravnave' na začetku tega poglavja.

Intuitivni vpogled v numerični izračun https://www.geogebra.org/m/vrj77ckq.

Primer 2

Za $a = 2$ in $q = \frac{1}{3}$ in ker je $|\frac{1}{3}| < 1$, dobimo konvergentno vrsto

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = 3.$$

Primer 3

Za $a = 1$ in $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$ in ker je $|\frac{1}{\sqrt{3}}| < 1$, dobimo konvergentno vrsto

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3}^i} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}.$$

Primer 4

Za $a = 1$ in $q = \sqrt{3}$ in ker je $|\sqrt{3}| \geq 1$, dobimo divergentno vrsto

$$1 + \sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{3}^i.$$

Splošno o konvergencah vrst - nadaljevanje

- Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- Obratno pa ni nujno res. **Harmonična vrsta**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

ni konvergentna. To je nekoliko težje razumeti in dokazati. Pomeni pa, da če bi dovolj dolgo seštevali člene v tej vrsti, bi prišli do poljubno velikega števila.

- Če za pozitivne člene a_n velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potem je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ konvergentna. Slednje je mogoče intuitivno hitro razumeti na sledeči način: Gibljemo se tako, da so naši koraki vse manjši in se približujejo 0 in obenem sta vsaka dva zaporedna koraka v obratni smeri. Če bi opazovali tako gibanje, bi izgledalo kot 'dušeno nihanje' desno-levo proti točki, ki predstavlja limito in končno vrednost vrste.

Splošno o konvergencah vrst

- Za primer $a_n = \frac{1}{n}$ torej velja, da je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

divergentna, medtem ko je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots$$

konvergentna in torej obstaja njena vsota. Vsote $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ni lahko izračunati, izkaže pa se, da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log_e 2 = -0.693147\ldots.$$

Intuitivno konvergenco in divergenco zgornjih vrst ponazorita dinamični vizualizaciji https://www.geogebra.org/m/zkkz3kww in https://www.geogebra.org/m/sfebjvtf v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs.

Funkcije - Splošno

Kaj je funkcija?

Najprej bomo obravnavali preproste funkcije. To so številske funkcije ene spremenljivke.

Funkcija je predpis, ki vsakemu elementu x iz **definicijskega območja** $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ priredi natanko določeno število $f(x) \in \mathbb{R}$.

$$f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

- Neodvisno spremenljivko, imenovano tudi **argument**, običajno označimo z x.
- Odvisno spremenljivko običajno označimo z $y = f(x)$. 'Odvisnost' se tu nanaša na odvisnost od neodvisne spremenljivke x in seveda od predpisa funkcije f.
- **Definicijsko območje** $\mathcal{D}_f$ so vse vrednosti x, za katere lahko izračunamo $f(x)$, oziroma, za katere ima predpis $f(x)$ smisel.
- **Zaloga vrednosti** $\mathcal{Z}_f = f(\mathcal{D}_f)$ so vse vrednosti y, ki jih dobimo kot $y = f(x)$, ko neodvisna spremenljivka x preteče celo definicijsko območje $\mathcal{D}_f$.

Kaj je graf funkcije?

Graf funkcije f je množica točk $(x, f(x))$ v ravnini

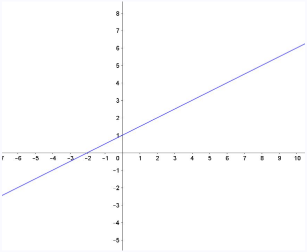
$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)); x \in \mathcal{D}_f\} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

To so vse točke s koordinatami $(x, f(x))$, ko vrednosti neodvisne spremenljivke x pretečejo vse vrednosti $\mathcal{D}$.

- Graf funkcije f je krivulja v ravnini.
- Iz definicije funkcije sledi, da graf funkcije seka poljubno navpično premico največ v eni točki. Namreč, za vsak $x \in \mathcal{D}_f$ dobimo točno določeno (in samo eno!) vrednost $f(x)$.

Primer 1

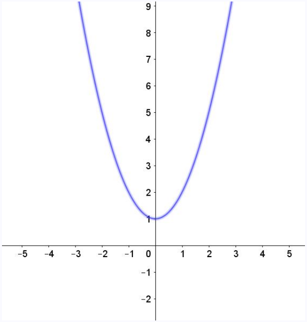
Za funkcijo $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ velja



- Definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ so vsa realna števila, saj lahko za neodvisno spremenljivko x v funkcijo vstavimo poljubno število $x \in \mathbb{R}$.
- Zaloga vrednosti $\mathcal{Z}_f$ so vsa realna števila, saj lahko v obliki $\frac{1}{2}x + 1$ zapišemo vsako število $y \in \mathbb{R}$.
- Definicijsko območje, zalogo vrednosti in mnoge druge lastnosti funkcije lahko nazorno interpretiramo tudi iz grafa (skica levo), katerega v našem primeru predstavljajo vse točke oblike $(x, \frac{1}{2}x + 1)$, ko x preteče definicijsko območje $\mathcal{D}_f$.

Primer 2

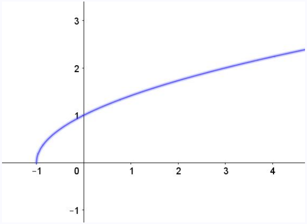
Za funkcijo $f(x) = x^2 + 1$ velja



- Definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ so vsa realna števila, saj lahko za neodvisno spremenljivko x v funkcijo vstavimo poljubno število $x \in \mathbb{R}$.
- Zaloga vrednosti $\mathcal{Z}_f$ so vsa realna števila, ki so večja ali enaka 1, saj lahko v obliki $x^2 + 1$ zapišemo samo števila iz intervala $[1, \infty)$. Torej $\mathcal{Z}_f = [1, \infty)$.
- Vse povedano lahko ponazorimo tudi na grafu (skica levo), katerega v našem primeru predstavljajo vse točke oblike $(x, x^2 + 1)$, ko x preteče definicijsko območje $\mathcal{D}_f$.

Primer 3

Za funkcijo $f(x) = \sqrt{x+1}$ velja



- Definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ so vsa realna števila, ki so večja ali enaka -1. Kvadratni koren namreč lahko izračunamo le za pozitivna števila, torej mora veljati $x \geq -1$ in je $\mathcal{D}_f = [-1, \infty)$.
- Zaloga vrednosti $\mathcal{Z}_f$ so vsa pozitivna realna števila. Torej $\mathcal{Z}_f = [0, \infty)$. **Poudarimo:** Ko govorimo o funkciji, ki je določena s kvadratnim korenom, za vrednost korena vedno vzamemo samo pozitivno vrednost.

  Na primer, v našem primeru za $f(x) = \sqrt{x+1}$ velja $f(3) = 2$ in $f(3) \neq -2$. Dve različni vrednosti funkcije pri isti neodvisni spremenljivki $x = 3$ bi bile namreč v nasprotju z definicijo funkcije.
- Vse povedano je ponazorjeno tudi na grafu (skica desno), katerega v našem primeru predstavljajo vse točke oblike $(x, \sqrt{x+1})$, ko x preteče definicijsko območje $\mathcal{D}_f$.

Funkcije: naraščanje in padanje

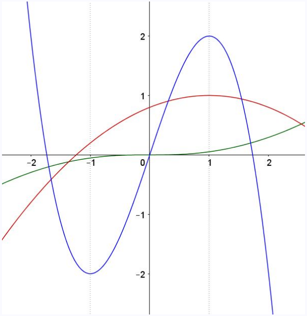
Če za funkcijo na nekem intervalu iz definicijskega območja velja

- $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, rečemo, da funkcija na tem intervalu **narašča**.
- $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, rečemo, da funkcija na tem intervalu **pada**.

Pomen naraščanja in padanja funkcije sovpada z naraščanjem in padanjem grafa funkcije v smeri od leve proti desni.

Primer

Za funkcije na sliki velja



- Zelena: narašča povsod.
- Rdeča: narašča na $(-\infty, 1]$ in pada na $[1, \infty)$.
- Modra: narašča na $[-1, 1]$ in pada na $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

- Z računom bi na primer za 'rdečo' funkcijo $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$ in za poljubni dve števili $x_1 \leq x_2$ iz intervala $(-\infty, 1]$ dobili $f(x_1) \leq f(x_2)$.

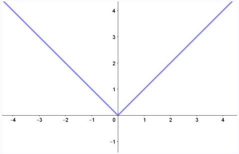
  Vzemimo na primer $-1 \leq 0$ in izračunamo $f(-1) = \frac{1}{5} \leq \frac{4}{5} = f(0)$.

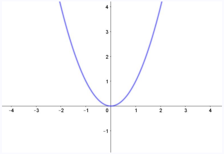
Sode in lihe funkcije

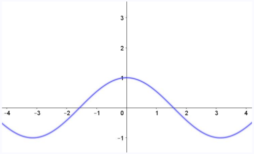
- Funkcija $f(x)$ je **soda**, če je simetrična preko y osi. Zapišemo: $f(-x) = f(x)$. Soda funkcija ima torej isto vrednost pri x-u kot pri $-x$-u.
- Funkcija $f(x)$ je **liha**, če je simetrična preko izhodišča. Zapišemo: $f(-x) = -f(x)$.
  Liha funkcija ima torej pri x-u obratno predznačeno in po absolutni vrednosti isto vrednost kot pri $-x$-u.

Primer 1

Funkcije $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$ in $h(x) = \cos x$ so zaporedoma predstavljene na spodnjih treh grafih:



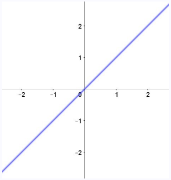


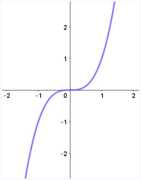


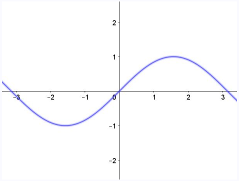
Vse tri funkcije so sode.

Primer 2

Funkcije $f(x) = x$, $g(x) = x^3$ in $h(x) = \sin x$ so zaporedoma predstavljene na spodnjih treh grafih:



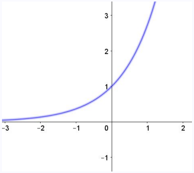


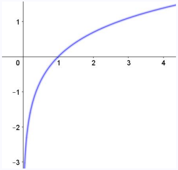


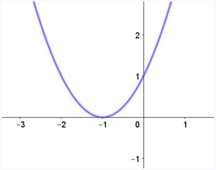
Vse tri funkcije so lihe.

Primer 3

Funkcije $f(x) = e^x$, $g(x) = \log_e x = \log x$ in $h(x) = x^2 + 2x + 1$ so zaporedoma predstavljene na spodnjih treh grafih:





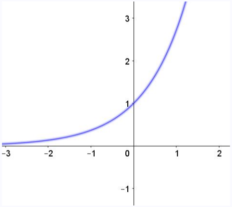


Nobena od funkcij ni niti soda niti liha.

Injektivne in surjektivne funkcije

- Funkcija $f(x)$ je **injektivna**, če za $x_1 \neq x_2$ velja $f(x_1) \neq f(x_2)$.
  To pomeni, da injektivna funkcija pri dveh različnih vrednostih ne more imeti iste vrednosti. Velja tudi, da vsaka vodoravna premica seka graf injektivne funkcije največ enkrat.
- Funkcija $f(x)$ je **surjektivna**, če za vsako vrednost $y \in \mathbb{R}$ obstaja vrednost $x \in \mathcal{D}_f$, da velja $f(x) = y$.
  Na kratko lahko rečemo tudi, da surjektivna funkcija zavzame vsako vrednost ali preprosto, da velja $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$. Velja tudi, da vsaka vodoravna premica seka graf surjektivne funkcije vsaj enkrat.
- Funkcija $f\, \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je **bijektivna**, če je injektivna in surjektivna.

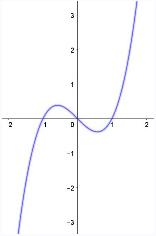
Primer 1



Funkcija $f(x) = e^x$

- je injektivna, ker vsako vrednost zavzame samo enkrat;
- ni surjektivna, ker ne zavzame negativnih vrednosti;
- ni bijektivna, ker ni surjektivna.

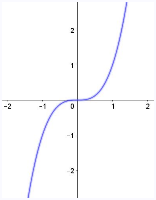
Primer 2



Funkcija $f(x) = x^3 - x$

- ni injektivna, ker ne zavzame vsake vrednosti samo enkrat. Na primer vrednost 0 zavzame kar trikrat, namreč $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$.
- Funkcija je surjektivna, ker zavzame vse vrednosti: $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$.
- Funkcija ni bijektivna, ker ni injektivna.

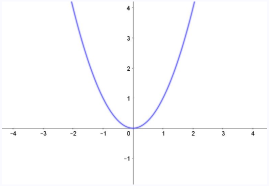
Primer 3



Funkcija $f(x) = x^3$

- je injektivna, ker vsako vrednost zavzame samo enkrat;
- je surjektivna, ker zavzame vse vrednosti: $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$;
- je bijektivna, ker je injektivna in surjektivna.

Primer 4



Funkcija $f(x) = x^2$

- ni injektivna, ker ni res, da zavzame vsako vrednost samo enkrat. Na primer vrednost 1 zavzame dvakrat, namreč $f(-1) = f(1) = 1$.
- Funkcija ni surjektivna, ker ne zavzame negativnih vrednosti.
- Funkcija ni bijektivna, ker ni niti injektivna niti surjektivna.

Kompozitum ali sestavljena funkcija

Za funkciji $f(x)$ in $g(x)$ definiramo **kompozitum** funkcij

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Poenostavljeno povedano kompozitum dveh funkcij pomeni 'zaporedno delovanje dveh funkcij', ki ga smatramo kot novo funkcijo.

Kompozitum (ali komponiranje dveh funkcij) pomeni, da poljubno vrednost neodvisne spremenljivke najprej vstavimo v prvo funkcijo in dobljeno vrednost te prve funkcije vstavimo v drugo funkcijo. Dobljena vrednost, ki jo tako izračuna druga funkcija je vrednost kompozituma teh dveh funkcij pri dani vrednosti neodvisne spremenljivke.

V splošnem $f \circ g \neq g \circ f$.

Primer 1

Naj bo $f(x) = 2x$ in $g(x) = x + 1$. Izračunajmo $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Izračunajmo najprej

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 5.$$

Splošno za poljubno vrednost neodvisne spremenljivke x pa dobimo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x + 1.$$

Primer 2

Naj bo kot v prejšnjem primeru $f(x) = 2x$ in $g(x) = x + 1$. Tokrat izračunajmo $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Izračunajmo najprej

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(3) = 6.$$

Splošno za poljubno vrednost neodvisne spremenljivke x pa dobimo

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = 2x + 2.$$

Vidimo torej, da je že za tako preprosti funkciji $f \circ g \neq g \circ f$.

Inverzna funkcija

Če je $f(x)$ **injektivna** funkcija, potem funkcijo $\mathbf{f^{-1}}(x)$, za katero velja

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{in} \quad (f \circ f^{-1})(x) = x,$$

imenujemo **inverzna funkcija** funkcije f.

Zgornji pogoj zapišemo tudi

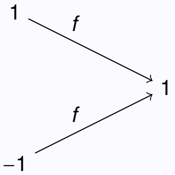
$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id,$$

pri čemer *id* označuje identično funkcijo $id(x) = x$. Rečemo tudi, da sta si taki funkciji f in f^{-1} druga drugi inverzni.

- Za označevanje funkciji $f(x)$ inverzne funkcije uporabimo oznako $f^{-1}(x)$. S tem želimo poudariti, da gre pri inverzni funkciji za 'obratni proces' kot pri osnovni funkciji. Če je na primer $f(3) = 2$ in bo funkcija f imela inverz, bo $f^{-1}(2) = 3$.
- Inverznost, oziroma 'obratnost delovanja' ali recipročnost funkcije in njenega inverza nakažemo tudi s skico

$$\begin{tikzcd} \mathrm{x} \arrow[r, bend left, "f"] & \mathrm{x} \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

- Zakaj mora biti funkcija injektivna, če naj ima inverzno funkcijo? Če funkcija ni injektivna, potem funkcija vsaj dve različni vrednosti preslika v isto vrednost. Na primer, če bi imeli $f(-1) = f(1) = 1$, potem za inverzno funkcijo f^{-1} ne bi mogli določiti, koliko naj bo njena vrednost pri 1, saj 'obratni proces' ne bi bil mogoč oziroma dobro določen. Po eni strani bi moralo veljati $f^{-1}(1) = -1$ po drugi pa $f^{-1}(1) = 1$, vemo pa, da mora biti $f^{-1}(1)$, če naj bo f^{-1} funkcija, enolično določen.



- Ko razmišljamo o inverzni funkciji je podobno, kot če bi se v originalni funkciji zamenjali vlogi odvisne in neodvisne spremeljivke. Odvisna spremenljivka ('rezultat') originalne funkcije postane neodvisna spremenljivka ('podatek') inverzne funkcije in kar je bila neodvisna spremenljivka ('podatek') originalne funkcije postane odvisna spremenljivka ('rezultat') inverzne funkcije. To lahko zapišemo
$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x.$$
Inverzno funkcijo f^{-1} torej lahko izračunamo tako, da zamenjamo vlogi spremenljivk v običajnem zapisu $y = f(x)$, torej $x = f(y)$, in nato kot funkcijo x-a izrazimo $y = f^{-1}(x)$.
- Graf inverzne funkcije f^{-1} dobimo tako, da prezrcalimo graf funkcije f prek simetrale lihih kvadrantov.

Dinamična vizualizacija: https://ggbm.at/y6peydqr v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs.

Opozorilo

Bodimo pozorni, namreč $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$. Pri funkcijah f^{-1} pomeni 'obratni funkcijski proces', medtem ko pri številih $a^{-1} = \frac{1}{a}$ pomeni 'obratno število' v smislu produkta.Tako kot je množenje z $a^{-1} = \frac{1}{a}$ obraten proces množenju z a, je uporaba inverzne funkcije obraten proces uporabi osnovne funkcije.

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\cdot a} & x \cdot a & \xrightarrow{\cdot a^{-1}} & x \cdot a \cdot a^{-1} = x \\ x & \xrightarrow{f} & f(x) & \xrightarrow{f^{-1}} & f^{-1}(f(x)) = x \end{array}$$

Primer

Funkciji $f(x) = 2x + 1$ poiščimo inverzno funkcijo. Linearna funkcija $f(x) = 2x + 1$ je injektivna, zato njena inverzna funkcija obstaja. Zapišemo $y = 2x + 1$ in zamenjamo vlogi x in y ter izrazimo y: $x = 2y + 1 \Longrightarrow y = \frac{x-1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.Dobili smo torej $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. Izračunajmo:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+1) = \frac{2x+1}{2} - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = x,$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}) = 2(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}) + 1 = x - 1 + 1 = x.$$

Torej za funkcijo f^{-1} res velja $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id$, kar pomeni, da sta si funkciji $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ in $f(x) = 2x + 1$ inverzni.

Transformacije funkcij

S kompozitumom funkcij so povezane tudi **transformacije funkcij**, s katerimi si pomagamo pri razumevanju in risanju raznih funkcij. Če vzamemo enostavno linearno funkcijo $g(x) = x + 1$ in poljubno funkcijo $f(x)$, potem s komponiranjem teh dveh funkcij dobimo **navpični** in **vodoravni** premik funkcije $f(x)$.

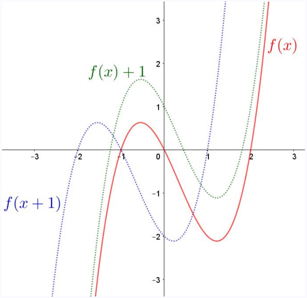
Namreč,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1$$

in

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1).$$

Na sliki desno so ponazorjeni grafi osnovne funkcije $f(x)$ in premikov za 1 v levo in za 1 navzgor.



Podobno kot s premiki si pri razumevanju in risanju funkcij pomagamo še z raztegi in zrcaljenji.

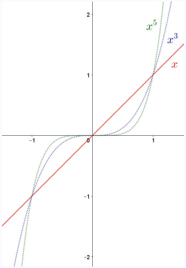
- Funkcija $f(x-a)$ pomeni vodoravni premik funkcije $f(x)$ za a v desno.
- Funkcija $f(x)+c$ pomeni navpični premik funkcije $f(x)$ za c navzgor .
- Funkcija $f(\frac{x}{a})$ pomeni vodoravni razteg funkcije $f(x)$ za faktor a.
- Funkcija $c \cdot f(x)$ pomeni navpični razteg funkcije $f(x)$ za faktor c.
- Funkcija $-f(x)$ pomeni zrcaljenje funkcije $f(x)$ preko osi x.
- Funkcija $f(-x)$ pomeni zrcaljenje funkcije $f(x)$ preko osi y.

Transformacije funkcij lahko nazorno predstavimo z dinamičnimi vizualizacijami https://www.geogebra.org/m/ppetkarn V https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs.

Potenčna funkcija

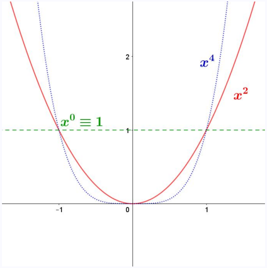
Kaj je potenčna funkcija?

Potenčna funkcija je vsaka funkcija oblike $f(x) = x^a$. Najbolje poznane potenčne funkcije so $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ in druge. Potenčna funkcija je tudi $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ in druge funkcije, pri katerih je $a \in \mathbb{R}$.



Potenčne funkcije z liho pozitivno potenco so oblike $f(x) = x^{2k+1}$ za $k \in \mathbb{N}$. Te funkcije imajo lastnosti:

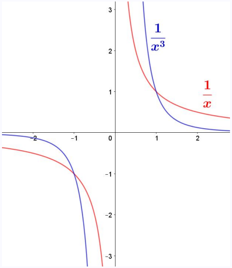
- definirane so na celi realni osi, torej $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$;
- zaloga vrednosti je cela realna os, torej $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$;
- so lihe funkcije:
- so strogo naraščajoče funkcije na celem $\mathcal{D}_f$;
- so injektivne, surjektivne in torej tudi bijektivne funkcije.



Potenčne funkcije s sodo pozitivno potenco so oblike $f(x) = x^{2k}$ za $k \in \mathbb{N}$. Te funkcije imajo lastnosti:

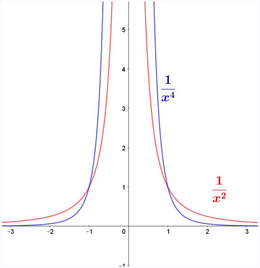
- definirane so na celi realni osi, torej $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$;
- zaloga vrednosti so vsa pozitivna realna števila, kar lahko zapišemo $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}^+$;
- so sode funkcije:
- so strogo padajoče na intervalu $(-\infty, 0]$ in strogo naraščajoče na intervalu $[0, \infty)$;
- niso niti injektivne niti surjektivne;

Med potenčne funkcije s sodo potenco lahko štejemo tudi zelo posebno in enostavno **konstantno** funkcijo $f(x) = x^0 \equiv 1$. To je funkcija za katero velja $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = \{1\}$, je soda funkcija, ker je konstanta seveda niti ne narašča niti ne pada in seveda ni niti injektivna niti surjektivna.



Potenčne funkcije z liho negativno potenco so oblike $f(x) = x^{-(2k+1)} = \frac{1}{x^{2k+1}}$ za $k \in \mathbb{N}$. Te funkcije imajo lastnosti:

- definirane so na celi realni osi, razen pri $x = 0$, torej $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$;
- zaloga vrednosti je cela realna os, razen vrednosti 0, torej $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R} - \{0\}$;
- so lihe funkcije;
- so strogo padajoče funkcije na celem definicijskem območju $\mathcal{D}_f$;
- so injektivne, surjektivne pa niso, ker ne zavzamejo vrednosti 0.

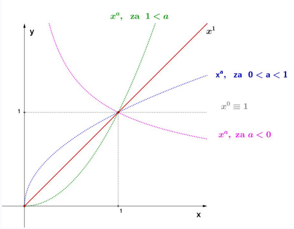


Potenčne funkcije s sodo negativno potenco so oblike $f(x) = x^{-(2k)} = \frac{1}{x^{2k}}$ za $k \in \mathbb{N}$. Te funkcije imajo lastnosti:

- definirane so na celi realni osi, razen pri $x = 0$, torej $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$;
- zaloga vrednosti so vsa pozitivna števila, torej $\mathcal{Z}_f = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$;
- so sode funkcije;
- so strogo naraščajoče funkcije na intervalu $(-\infty, 0)$ in strogo padajoče na intervalu $(0, \infty)$;
- niso niti injektivne niti surjektivne.

Dinamična vizualizacija potenčnih funkcij s celoštevilskimi potencami je dostopna na povezavi https://ggbm.at/hk4hvcwq v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs.

Potenčne funkcije s potenco, ki ni nujno celo število, so tudi potenčne funkcije. Pri teh je potrebna posebna previdnost.



Namreč že za $a = \frac{1}{2}$ je potenčna funkcija oblike $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ definirana le za pozitivne vrednosti spremenljivke x.

V splošnem so torej potenčne funkcije definirane le za pozitivne vrednosti x-a. Vse potenčne funkcije gredo skozi točko $(1,1)$. Za razumevanje je koristno in zanimivo opazovati, kako se potenčna funkcija enakomerno (zvezno) spreminja s spreminjanjem potence a. 'Nezveznost' ali 'skok' se zgodi samo pri $a = 0$.

Dinamična vizualizacija splošnih potenčnih funkcij je dostopna na povezavi https://ggbm.at/zudfntfv V https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs.

Polinomi

Linearno in kvadratno funkcijo že dobro poznamo iz srednje šole. Običajno ju zapišemo v obliki $f(x) = kx + n$ in $f(x) = ax^2 + bx + c$. Opazimo, da 'dobimo' kvadratno funkcijo, če linearni funkciji dodamo 'kvadratni člen'. Na primer, če linearni funkciji $f(x) = 2x + 1$ 'dodamo' x^2, dobimo kvadratno funkcijo $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

- Linearna funkcija (na primer $f(x) = 2x + 1$) je **polinom prve stopnje**.
- Kvadratna funkcija (na primer $f(x) = x^2 + 2x + 1$) je **polinom druge stopnje**.
- Če dodamo še 'tretjo potenco' (na primer $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$) dobimo **polinom tretje stopnje**.
- Če dodamo še 'več potenc', kjer je 'najvišja sedma potenca' (na primer $f(x) = x^7 - x^5 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$) dobimo **polinom sedme stopnje**.

Polinom prve stopnje - ponovimo

Funkcija oblike

$$f(x) = k \cdot x + n$$

predstavlja premico.

- n je začetna vrednost. Premica gre čez točko $(0, n)$.
- k je smerni koeficient premice. Premica gre čez točko $(1, n + k)$.

Primeri v okviru dinamične vizualizacije: https://www.geogebra.org/m/zdvpjfkb v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs.

Polinom druge stopnje - ponovimo

Funkcija oblike
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
za $a \neq 0$ predstavlja kvadratno funkcijo (parabolo).

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ je kvadratna funkcija zapisana v **splošni obliki**.
- Vedno lahko zapišemo $ax^2 + bx + c = a(x-p)^2 + q$, pri čemer je $p = -\frac{b}{2a}$ in $q = \frac{4ac-b^2}{4a}$.Točka $T(p, q)$ je **teme** parabole. $f(x) = a(x-p)^2 + q$ je kvadratna funkcija zapisana v **temenski obliki**.
- Če velja $b^2 - 4ac \geq 0$ lahko zapišemo $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, pri čemer je $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. x_1 in x_2 sta ničli kvadratne funkcije. $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ je kvadratna funkcija zapisana v **ničelni obliki**.

Primeri v okviru dinamične vizualizacije: https://www.geogebra.org/m/dhuszmvg v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs.

Polinomi - splošno

Funkcija oblike

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

pri čemer je $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, je **polinom** stopnje n zapisan v splošni obliki.

- Števila $a_0, a_1, \ldots, a_n$ imenujemo koeficiente polinoma. Koeficient a_n, to je število ob najvišji potenci se imenuje **vodilni koeficient** polinoma in mora biti različen od 0. To je koeficient, ki določa stopnjo polinoma, ki je enaka n. Ostali koeficienti so lahko tudi enaki 0. Koeficient a_0 se imenuje **začetna vrednost** polinoma.
- Polinomi so definirani za vsa realna števila: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Ničelna oblika polinoma: Polinom je včasih mogoče zapisati v ničelni obliki, to je kot produkt samih linearnih faktorjev.

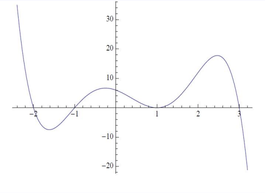
- Na primer polinom druge stopnje $p(x) = x^2 - 1$ lahko zapišemo kot $p(x) = (x + 1)(x - 1)$. Slednje že poznamo kot kvadratno funkcijo zapisano v ničelni obliki.
- Polinom tretje stopnje $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ lahko zapišemo kot produkt linearnih faktorjev $p(x) = (x + 1)(x + 1)(x - 1) = (x + 1)^2(x - 1)$.
- Polinom stopnje n, ki ga je mogoče zapisati kot produkt samih linearnih faktorjev, bo oblike $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$.
- Zapis polinoma v ničelni obliki je pomemben, ker iz takega zapisa razberemo ničle polinoma.

Primer

Z računom lahko preverimo, da je

$$p(x) = -x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 5x + 6 = -(x-1)^2(x+2)(x+1)(x-3)$$

Iz zapisa polinoma v ničeni obliki razberemo, da ima polinom ničle pri $1, -2, -1$ in 3. Ker je v izrazu $(x-1)^2$ druga stopnja, rečemo, da je 1 ničla druge stopnje. Podobno kot pri funkciji $f(x) = x^2$ se polinom v ničli druge stopnje x-osi le dotakne. Glede na stopnje pri posameznih ničlah polinoma lahko sklepamo, da se pri posamezni ničli, ki je na primer stopnje k, polinom obnaša podobno kot se obnaša $f(x) = x^k$ ali kot $f(x) = -x^k$. Če narišemo zgornji polinom, dobimo desno sliko



Nerazcepni polinomi: Ni pa mogoče razcepiti vsakega polinoma. Obstajajo tudi polinomi, ki (realnih) ničel sploh nimajo.

- V obliki produkta linearnih faktorjev ne moremo zapisati na primer polinoma $p(x) = x^2 + 1$. Ta nima (realnih) ničel in ga zato ni mogoče zapisati kot produkt linearnih faktorjev. Rečemo tudi, da polinoma v $\mathbb{R}$ ni mogoče razcepiti na linearne faktorje.
- Tak polinom je mogoče razcepiti v kompleksnih številih $\mathbb{C}$. Namreč $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$, kjer je $i \in \mathbb{C}$ kompleksno število, za katerega velja $i^2 = -1$.
- Podobno je v $\mathbb{R}$ nerazcepen vsak polinom oblike $p(x) = x^2 + c$ za $c > 0$. Tak polinom se razcepi v $\mathbb{C}$ kot $x^2 + c = (x - i\sqrt{c})(x + i\sqrt{c})$.
- Od tu lahko hitro sklepamo, da obstajajo zapleteni polinomi, ki ničel sploh nimajo. Na primer $p(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 5) = x^6 + 8x^4 + 17x^2 + 10$ nima nobene realne ničle.
- Velja pa, da ima vsak polinom lihe stopnje vsaj eno (realno) ničlo.
- Iz zapisa polinoma v ničelni obliki lahko sklepamo, da ima polinom stopnje n kvečjemu n ničel.
- Mnoge polinome je težko razcepiti in ugotoviti, kakšne ničle imajo. Za vse polinome pa velja, da jih je mogoče razcepiti na dva načina:
  - na linearne in nerazcepne kvadratne faktorje s koeficienti v $\mathbb{R}$. Na primer $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$.
  - na linearne faktorje s koeficienti v $\mathbb{C}$. Na primer $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x - i)(x + i)$.

Polinom skozi dane točke: Z poljubne točke z različnimi x-vrednostmi vedno obstaja polinom, katerega graf vsebuje vse te točke. Če je točk n, obstaja tak polinom (že) stopnje $n - 1$.

- V primeru dveh točk je jasno, da dve točki določata premico, kar je graf polinoma prve stopnje. To dejstvo že poznamo.
- Tri točke določajo polinom druge stopnje, to je kvadratna funkcija. Tudi to dejstvo že poznamo in bi z nekaj računanja najbrž znali tak polinom poiskati.
- V primeru točk (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, iščemo polinom $p(x)$ stopnje $n - 1$, za katerega bo veljalo $p(x_i) = y_i$. Kako tak polinom dobimo si bomo pogledali na konkretnem primeru.

Primer

Vzemimo npr. točke
$$(1,-5),\ (2,6),\ (3,-7),\ (4,9).$$

- Zapišimo izraze:

$$\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}(-5) \qquad \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}6$$
$$\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}(-7) \qquad \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}9$$

- Opazimo preprost vzorec oblikovanja teh štirih izrazov. Prvi izraz smo dobili tako, da smo v števcu napisali tri produkte oblike $(x - \_\_)$ in zaporedoma vstavili x-koordinate vseh razen prve točke. V imenovalcu pa enako, le da smo namesto x vpisali x-koordinato prve točke. Tako dobljen ulomek smo pomnožili z y-koordinato prve točke. Lahko je preveriti, da je prvi izraz polinom tretje stopnje, ki ima pri 1 vrednost -5 pri $2, 3, 4$ pa vrednost nič. Podobno je drugi izraz oblikovan tako, da ima pri 2 vrednost 6, pri vseh ostalih pa vrednost 0. In podobno še za preostala dva. Če vse štiri izraze seštejemo, dobimo polinom tretje stopnje, ki vsebuje vse štiri dane točke.
- Algoritem takega iskanja polinoma skozi dane točke morebiti izgleda računsko dolg, a je za uporabo računalniškega računanja zelo preprost.
- Takemu polinomu rečemo **interpolacijski polinom**.

Dinamična vizualizacija: https://ggbm.at/s8wzbdkb v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs.

Racionalne funkcije so funkcije v obliki ulomka

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kjer sta funkciji $p(x)$ v števcu in $q(x)$ v imenovalcu polinoma.

Primer

Vzemimo racionalno funkcijo $r(x) = \frac{x^2+x}{x^2-4}$ in jo zapišimo v obliki $r(x) = \frac{x^2+x}{x^2-4} = \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+2)} = 1 + \frac{x+4}{x^2-4}$. Iz zapisa ugotovimo

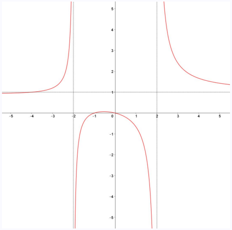
- Ker je števec racionalne funkcije enak $x(x+1)$, sta $x = 0$ in $x = -1$ ničli (prve stopnje) polinoma v števcu in zato tudi **ničli racionalne funkcije**.
- Ker je imenovalec racionalne funkcije enak $(x-2)(x+2)$, sta ničli imenovalca enaki $x = -2$ in $x = 2$. Pri ničlah polinoma v imenovalcu dobimo deljenje z nič, kar pomeni, da tu racionalna funkcija ni definirana. Ker v bližini ničle imenovalca vrednost racionalne funkcije narašča preko vseh meja, rečemo, da so ničle polinoma v imenovalcu **poli racionalne funkcije**.
- Za po absolutni vrednosti zelo velike x-e je $x+4$ približno enako x in x^2-4 približno enako x^2 in zato $\frac{x+4}{x^2-4} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \sim 0$. Torej je za po absolutni vrednosti zelo velike x racionalna funkcija približno enaka 1. Funkcijo (to je polinom) kateri se racionalna funkcija približuje za po absolutni vrednosti velike x-e imenujemo **asimptota racionalne funkcije**. V našem primeru je asimptota $y = 1$.

Ker velja

- Podobno kot polinom tudi racionalna funkcija v ničlah lihe stopnje zamenja predznak, v ničlah sode stopnje pa ne, saj se x-osi le dotakne.
- Racionalna funkcija se v polih stopnje k obnaša podobno kot funkcija $\frac{1}{x^k}$. Torej zamenja predznak za lihe stopnje in ohranja predznak za sode stopnje.
- Za po absolutni vrednosti zelo velike x-e se racionalna funkcija približuje asimptoti.
- Ko izračunamo vrednost racionalne funkcije za katero izmed vrednosti, ki ni niti ničla niti pol, v našem primeru na primer $r(1) = -\frac{2}{3}$, bomo s premislekom in v našem primeru upoštevanjem

  $$\begin{aligned} \text{Ničle:} &\quad 0, -1 \\ \text{Poli:} &\quad -2, 2 \\ \text{Asimptota:} &\quad y = 1 \end{aligned}$$

  že lahko narisali graf.



- Opazimo še, da za $x = -4$ velja $r(x) = 1$. V tej točki (pri x-u za katerega je ostanek pri deljenju števca z imenovalcem enak 0) racionalna funkcija seka asimptoto.

Racionalne funkcije - povzetek

Racionalna funkcija je funkcija oblike

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kjer sta $p(x)$ in $q(x)$ polinoma. Da bi racionalno funkcijo razumeli in znali narisati njen graf

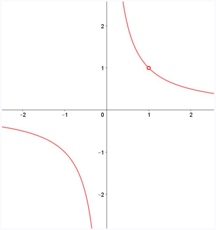
- najprej določimo ničle števca in ničle imenovalca.
- Definicijsko območje racionalne funkcije so vsa realna števila razen ničel imenovalca: $\mathcal{D}_r = \mathbb{R} \setminus \{\text{ničle imenovalca}\}$.
- Ničle števca skupaj s stopnjami določajo **ničle racionalne funkcije**.
- Ničle imenovalca skupaj s stopnjami določajo **pole racionalne funkcije**.
- Po deljenju $p(x)$ s $q(x)$ zapišemo $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{o(x)}{q(x)}$, pri čemer je stopnja $o(x)$ manjša od stopnje $q(x)$. Polinom $a(x)$ (lahko je $a(x) \equiv 0$) je **asimptota racionalne funkcije**. Za zelo velike in za zelo majhne x se $r(x)$ približuje vrednosti $a(x)$. Funkcija lahko asimptoto tudi seka. To se zgodi v točkah, kjer je $o(x) = 0$.

‘Ne-okrajšane’ racionalne funkcije

Doslej smo obravnavali ‘okrajšane’ racionalne funkcije. To pomeni, da so ničle različne od polov. Lahko se pa zgodi, da bi pri računanju dobili, da je ista vrednost hkrati ničla in hkrati pol racionalne funkcije. To pomeni, da je racionalna funkcija napisana v **ne-okrajšani obliki**, oziroma, da imata števec in imenovalec kak skupen faktor. Za zgled vzemimo funkciji $r(x) = \frac{x}{x^2}$ in $q(x) = \frac{x-1}{x^2-x}$. Če ulomka formalno pokrajšamo, dobimo $r(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ in $q(x) = \frac{x-1}{x^2-x} = \frac{1}{x}$. A spomnimo se, da z 0 ne smemo deliti. Mi pa smo delili z 0 v prvem primeru, ko je $x = 0$ in v drugem primeru, ko je $x = 1$. Torej smo funkciji $r(x)$ in $q(x)$ po krajšanju napisali površno. Pravilen zapis bi bil

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{za } x \neq 0 \\ \text{nedefinirano}, & \text{za } x = 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad q(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{za } x \neq 1 \\ \text{nedefinirano}, & \text{za } x = 1 \end{cases}$$

Ker je prva funkcija pri $x = 0$ tudi sicer nedefinirana, je dejansko $r(x) = \frac{1}{x}$, medtem ko je $q(x) = \frac{1}{x}$ le za $x \neq 1$, pri $x = 1$ pa $q(x)$ ni definirana, saj če v originalno funkcijo $q(x)$ vstavimo $x = 1$ dobimo ‘0 deljeno z 0’. Graf racionalne funkcije $q(x)$ narišemo tako, da s ‘krogcem’ (kot na sliki) ali puščicami označimo, da v dani točki funkcija ni definirana.



Eksponentna funkcija je vsaka funkcija oblike $f(x) = a^x, a > 0$. Za razliko od potenčne funkcije je pri eksponentni funkciji spremenljivka x v eksponentu.

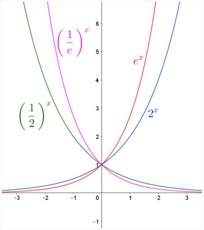
Ponovimo:

Eksponentna funkcija: $f(x) = a^x$ **Potenčna funkcija**: $f(x) = x^a$

Pogoj, da je osnova pozitivna ($a > 0$) je potreben zaradi definiranosti funkcije. Neodvisna spremenljivka x v eksponentu namreč zavzame poljubne vrednosti $x \in \mathbb{R}$. Če bi veljalo $a < 0$, bi bila to zelo čudna funkcija, ki pri mnogih x-ih (npr. pri $x = \frac{1}{2k}$ za $k \in \mathbb{Z}$) sploh ne bi bila definirana.

Eksponentna funkcija $f(x) = a^x, a > 0$ ima lastnosti:

- definirana je na celi realni osi, torej $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$;
- zaloga vrednosti so vsa pozitivna realna števila, torej $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$;



- gre skozi točki $(0, 1)$ in $(1, a)$;
- je injektivna za vsak $a \neq 1$;
- za $a > 1$ je strogo naraščajoča na celem $\mathcal{D}_f$;
- za $a < 1$ je strogo padajoča na celem $\mathcal{D}_f$;
- za $a = 1$ je konstantna funkcija $f(x) = 1^x \equiv 1$;
- ena najpogosteje uporabljenih eksponentnih funkcij je $f(x) = e^x$, za $e = 2.71828\ldots$.

Eksponentna funkcija - primeri 1

Razumevanje 'neverjetno hitre' rasti eksponentne funkcije razloži številno navidezno neverjetne pojave:

- Kaj bi pomenila 'idealna' 3% gospodarska rast (in rast porabe energije) za obdobje 6 000 let?Za 1 liter goriva danes bi čez 6 000 let porabili

$$1.03^{6\,000} \approx 10^{77}$$

  litrov goriva.Kako veliko je to število?
  - Prostornina planeta Zemlja je približno 10^{24} litrov.
  - Prostornina krogle s središčem v središču Sonca, ki bi segala do Zemlje, je približno 10^{37} litrov.
  - Prostornina krogle s središčem v središču Sonca, ki bi segala do nam najbližje zvezde *Alpha Centauri*, ki je od nas oddaljena 25 000 milijard kilometrov (približno 2.7 svetlobnih let), je približno 10^{53} litrov.
  - Prostornina vesolja (krogle z radijem 13.7 milijard svetlobnih let), je približno 10^{82} litrov.

Eksponentna funkcija - primeri 2

- Kolikokrat lahko prepognemo list papirja? Če bi 0.1 mm debel list papirja prepognili 42 krat, bi dobili 'debelino' $0.1\ \text{mm} \times 2^{42} \approx 439\,805$ km. Od Zemlje do Lune je približno 350 000 km.
- Koliko riža bi dobili, če bi na 64 šahovskih polj zaporedoma postavili $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ zrn? $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$

$$\frac{18\,446\,744\,073\,709\,551\,615}{22\,000 \cdot 1\,000 \cdot 40 \cdot 3} \approx 7\,000\,000\,000$$

  To so 3 tovornjaki (40 ton) za vsakega prebivalca Zemlje.
- Širjenje virusa v pandemiji v odvisnosti od faktorja ('socialne discipline in kužnosti') je popdano z eksponentno rastjo:

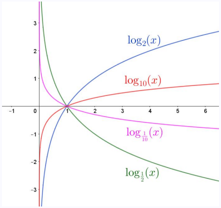
dni/k	2	1.5	1	0.5	0.2
7	2 187	610	128	17	4
10	59 049	9 537	1 024	58	6
15	14 348 907	931 323	32 768	438	15

Logaritemska funkcija

Eksponentna funkcija $f(x) = a^x$, $a > 0$ in $a \neq 1$ je injektivna, zato obstaja njen inverz $f^{-1}(x)$. Inverzno funkcijo eksponentne funkcije imenujemo **logaritemska funkcija** in jo označimo $f^{-1}(x) = \log_a(x)$. Pri tem seveda velja $a > 0$ in $a \neq 1$. Številu a rečemo **osnova** logaritma.

Iz lastnosti eksponentne funkcije sledi, da za logaritemsko funkcijo $f(x) = \log_a(x)$ veljajo **lastnosti**:

- gre skozi točki $(1, 0)$ in $(a, 1)$;
- definirana je za vsa pozitivna realna števila, torej $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$;



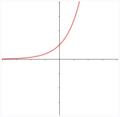
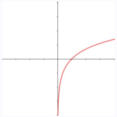
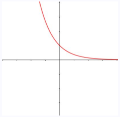
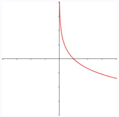
- zaloga vrednosti so vsa realna števila, torej $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$;
- $x = a^y \iff \log_a x = y$ (enačbi sta ekvivalentni);
- je injektivna in surjektivna (bijektivna iz $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$);
- za $a > 1$ je strogo naraščajoča na celem $\mathcal{D}_f$;
- za $a < 1$ je strogo padajoča na celem $\mathcal{D}_f$;

Logaritemska funkcija - dodatne lastnosti

- $\log_a 1 = 0$ . . . . ker $a^0 = 1$.
- $\log_a a = 1$ . . . . ker $a^1 = a$.
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ . . . . ker $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
- $\log_a x^r = r \log_a x$.
  - **Opozorilo**: iz razumevanja definicijskega območja sledi, da sta tako x^r kot x pozitivna. Tako ni odveč opozoriti, da velja npr. $\log_a x^2 = 2\log_a |x|$.
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.
  - **Komentar**: Tej formuli rečemo tudi **prehod na novo osnovo**. Opazimo, da je $\frac{1}{\log_b a}$ konstanta. Tako smo logaritem z osnovo a zapisali kot logaritem z osnovo b in ga pomnožili s konstanto $\frac{1}{\log_b a}$:

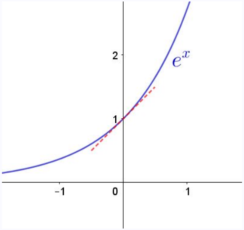
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b x$$

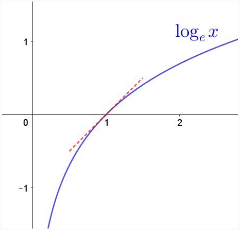
Eksponentna in logaritemska funkcija - primerjava

	a^x	$\log_a x$
definicijsko območje	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
zaloga vrednosti	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$1 < a$	narašča 	narašča 
$0 < a < 1$	pada 	pada 

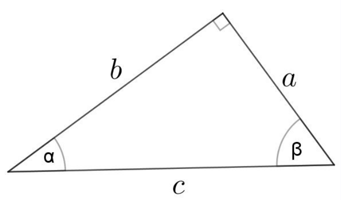
Najpogosteje uporabljene osnove eksponentne in logaritemske funkcije

- Najpogosteje uporabljena osnova je $e = 2,71828\ldots$. Uporablja se tudi druge osnove, kot na primer 2 in 10.
- Uporabljamo oznako: $\log x = \log_e x$.
- Zakaj je $e = 2,71828\ldots$ tako posebna osnova? Eksponentna funkcija e^x in logaritemska funkcija $\log x = \log_e x$ sta edini funkciji, ki imata v točki $(0,1)$ oziroma v točki $(1,0)$ strmino enako 1. To je zelo pomembno pri analizi funkcij (pri odvodu).





Dinamična vizualizacija: https://ggbm.at/djumf6d5 V https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs



V pravokotnem trikotniku so vsa razmerja stranic odvisna le od enega izmed kotov. Zato lahko v pravokotnem trikotniku definiramo funkcije

$$\sin(\text{kot}) = \frac{\text{'nasprotna kateta'}}{\text{'hipotenuza'}}$$

$$\cos(\text{kot}) = \frac{\text{'priležna kateta'}}{\text{'hipotenuza'}}$$

$$\tan(\text{kot}) = \frac{\text{'nasprotna kateta'}}{\text{'priležna kateta'}} \qquad \cot(\text{kot}) = \frac{\text{'priležna kateta'}}{\text{'nasprotna kateta'}}$$

Funkcije imenujemo zaporedoma 'sinus', 'kosinus', 'tangens' in 'kotangens'. To so **kotne funkcije**. Argument (neodvisno spremelnjivko) kotnih funkcij običajno označujemo z x ali z grškimi črkami $\alpha, \beta, \ldots$, da ponazorimo kateri kot obravnavamo. V našem primeru glede na sliko torej velja:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}, \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c}, \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{b}, \quad \cot(\alpha) = \frac{b}{a}$$

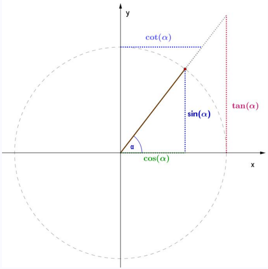
$$\sin(\beta) = \frac{b}{c}, \quad \cos(\beta) = \frac{a}{c}, \quad \tan(\beta) = \frac{b}{a}, \quad \cot(\beta) = \frac{a}{b}$$

Včasih se uporabljajo tudi alternativne oznake $\tan(x) = \mathrm{tg}(x)$ in $\cot(x) = \mathrm{ctg}(x)$.

Velja tudi $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, $\tan(x) = \frac{1}{\cot(x)}$ in $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$.

Kotne funkcije na enotski krožnici

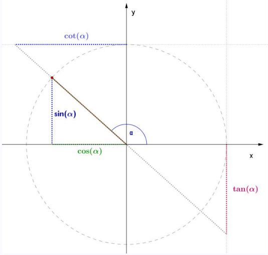
Razmislimo, da so prej definirane kotne funkcije določene s pomočjo pravokotnega trikotnika. Torej vemo le kolikšne so kotne funkcije za kote ki so večji od 0 in manjši od 90^o.



Če v koordinatni sistem narišemo krožnico s središčem v izhodišču in radijem 1 (**enotsko krožnico**), ter opazujemo, kje krožnico seka poltrak iz izhodišča, ki ga določa kot α glede na x-os, opazimo 'pravokotne trikotnike', v katerih lahko opazujemo vrednosti kotnih funkcij.

Ker je radij krožnice 1, lahko razmislimo, da vrednosti kotnih funkcij dobijo nazorni geometrijski pomen, ki je nakazan na sliki.

Kotne funkcije za kote večje od 90^o

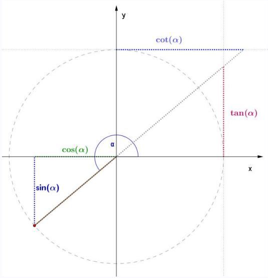


Razmislek o kotnih funkcijah v enotski krožnici omogoča nazorno definicijo kotnih funkcij tudi za kote, ki so večji od 90^o.

Bodimo pa pozorni na predznake vrednosti kotnih funkcij glede na koordinatni sistem. Za kote večje od 90^o in manjše od 180^o, je (opazujmo sliko) sinus pozitiven, kosinus negativen, tangens negativen in kotangens negativen.

Opazimo, kako se 'razbereta' tangens in kotangens na premicah $x = 1$ in $y = 1$.

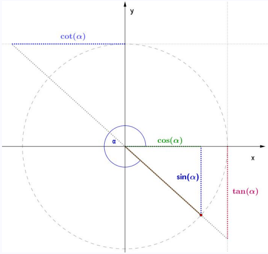
Kotne funkcije za kote večje od 180^o in manjše od 270^o



Za kote večje od 180^o in manjše od 270^o, je (opazujmo sliko) sinus negativen, kosinus negativen, tangens pozitiven in kotangens pozitiven.

Opazimo, kako se 'razbereta' tangens in kotangens na premicah $x = 1$ in $y = 1$.

Kotne funkcije za kote večje od 270^o in manjše od 360^o



Za kote večje od 270^o in manjše od 360^o, je (opazujmo sliko) sinus negativen, kosinus pozitiven, tangens negativen in kotangens negativen.

Opazimo, kako se 'razbereta' tangens in kotangens na premicah $x = 1$ in $y = 1$.

Razmislimo, kakšne vrednosti kotnih funkcij bi dobili za negativi kot $-\alpha$? Dobili bi iste vrednosti kot za kot $360^o - \alpha$.

Z razumevanjem **kotnih funkcij na enotski krožnici** je mogoče razložiti mnoge njihove lastnosti.

Opazujmo in raziskujmo z dinamično vizualizacijo https://www.geogebra.org/m/gvbew3cy v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs.

Kako merimo kote?

Kote običjano merimo v ‘stopinjah’ ali ‘radianih’. Merjenje v ‘radianih’ je za nekatere namene veliko ugodnejše od merjenja v ‘stopinjah’.

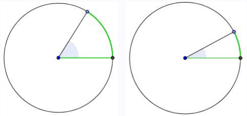
Osnovna povezava med ‘stopinjami’ ali ‘radiani’ je, da polni kot meri 360 ‘stopinj’, oziroma 2π ‘radianov’. Torej velja

$$360^o = 2\pi^{rd} \text{ oziroma } 180^o = \pi^{rd}$$

- Koliko ‘stopinj’ je na primer $\frac{2}{3}^{rd}$ in koliko ‘radianov’ je na primer 60^o?

$$\frac{2}{3}^{rd} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^o = \left(\frac{120}{\pi}\right)^o \qquad 60^o = \left(60 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^{rd} = \left(\frac{\pi}{3}\right)^{rd}$$

- ‘Radiani’ merijo kote z razmerjem med dolžino loka in radijem kroga.
- Kot 1^{rd} je kot pri katerem je lok enako dolg kot radij. Kot 0.5^{rd} je kot pri katerem je lok dolg polovico radija.



- V nadaljevanju bomo pretežno uporabljali ‘radiane’, včasih pa tudi ‘stopinje’.
- Dinamična vizualizacija: https://ggbm.at/xpeqtstp v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

Periodičnost

Iz razumevanja kotnih funkcij na enotski krožnici je očitno, da se vrednosti vseh kotnih funkcij ponovijo, če kot povečamo za 'polni kot'. Rečemo tudi, da se vrednosti kotnih funkcij ponovijo s **periodo** 2π, oziroma 360^o.

- Funkciji $\sin x$ in $\cos x$ sta periodični s periodo 2π ozirmoma 360^o.
  - $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
  - $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- Funkciji $\tan x$ in $\cot x$ sta periodični s periodo π ozirmoma 180^o.
  - $\tan(x + \pi) = \tan(x)$
  - $\cot(x + \pi) = \cot(x)$

Nekatere druge lastnosti kotnih funkcij

Med kotnimi funkcijami veljajo številne zveze. Na primer iz razumevanja kotnih funkcij na enotski krožnici hitro sledi:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$

Z nekaj računanja, pa je mogoče dobiti tudi številne druge enakosti, kot na primer:

- $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

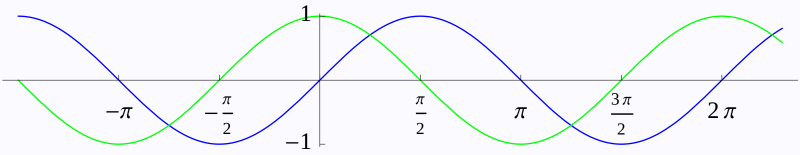
Definicijska območja in zaloge vrednosti

Z razumevanjem kotnih funkcij na enotski krožnici lahko hitro določimo tudi njihova definicijska območja in zaloge vrednosti.

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\mathcal{D}_f$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\mathbb{R} - \{k\pi\}$
$\mathcal{Z}_f$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

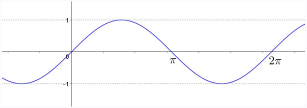
Grafa sinusa in kosinusa

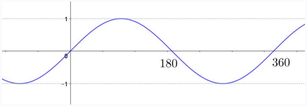
Z razumevanjem vrednosti funkcij $f(x) = \sin(x)$ in $g(x) = \cos(x)$ na enotski krožnici narišemo grafa (modro: sinus in zeleno: kosinus).



- Dinamična vizualizacija: https://ggbm.at/cynexdyr , https://ggbm.at/aqdw2cmx in https://ggbm.at/bwrbzm3y v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

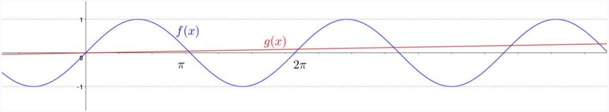
Opozorilo: Graf na primer funkcije $\sin x$ pogosto rišemo tako, da nismo posebej pozorni na enote. To je, včasih rečemo, da ima funkcija ničlo pri π in včasih, da ima ničlo pri 180^o ter narišemo enega izmed grafov





Ko govorimo o splošnih lastnostih in obliki funkcije to res ni potrebno, sicer sta pa to bistveno drugačna grafa oziroma funkciji. Pravilen je dejansko samo prvi izmed zgornjih grafov, pri drugem smo pa x-os 'močno skrčili', namreč enoti sta enako dolgi le na prvem izmed zgornjih grafov, kjer $\pi \simeq 3.14$ dejansko ustreza 3-em enotam.

V koordinatnem sistemu, ki ima enako dolgo enoto na x in na y osi sta funkciji sinusa, kjer je argument v radianih oziroma stopinjah bistveno drugačni. Če označimo $f(x) = \sin(x^{rd})$ in $g(x) = \sin(x^o)$ bosta v istem koordinatnem sistemu funkciji izgledali bistveno drugačni.

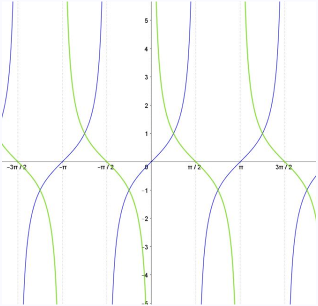


Seveda, funkcija $g(x)$ je veliko bolj 'raztegnjena'. Maksimum, to je vrednost 1 doseže šele pri $x = 90$ in ne pri $x = \frac{\pi}{2} \simeq 1.57$ kot $f(x)$.

Vizualizacija: https://www.geogebra.org/m/paeshjcz V https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

Grafa tangensa in kotangensa

Z razumevanjem vrednosti funkcij $f(x) = \tan(x)$ in $g(x) = \cot(x)$ na enotski krožnici narišemo grafa (modro: tangens in zeleno: kotangens).



- Dinamična vizualizacija: https://ggbm.at/bwrbzm3y v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

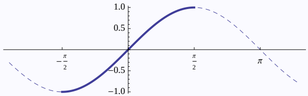
Nekatere vrednosti kotnih funkcij

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
0	0	1	0	$\pm\infty$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$	0

Krožne funkcije je ime za (prirejene) inverzne funkcije kotnih funkcij.

Kotne funkcije niso injektivne, zato ne obstajajo njihove inverzne funkcije.

Če pa se omejimo na območje, kjer je posamezna kotna funkcija injektivna, lahko definiramo njen inverz.

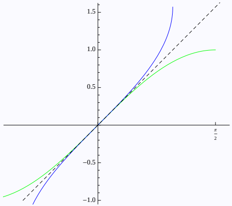


Funkcija sinus je bijektivna kot funkcija

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \xrightarrow{\sin} [-1, 1]$$

Zato obstaja inverzna funkcija, ki jo imenujemo **arkus sinus** in označimo $\arcsin x$. Ta funkcija je bijektivna kot funkcija

$$[-1, 1] \xrightarrow{\arcsin} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

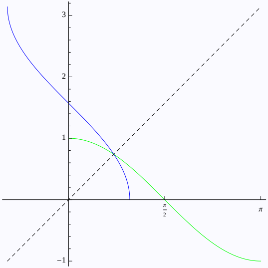


Na sliki levo je v zeleni barvi narisan odsek originalne funkcije $\sin x$, z modro pa njen inverz $\arcsin x$. Kot za druge med sabo inverzne funkcije velja

$$y = \arcsin x \iff \sin y = x$$

Velja tudi $\mathcal{D}_{\arcsin} = [-1, 1]$, $\mathcal{Z}_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Krožne funkcije - $\arccos x$



Podobno je kosinus bijektivna funkcija

$$[0, \pi] \xrightarrow{\cos} [-1, 1]$$

Zato obstaja inverzna funkcija, ki jo imenujemo **arkus kosinus** in označimo $\arccos x$. Ta funkcija je bijektivna kot funkcija

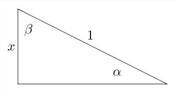
$$[-1, 1] \xrightarrow{\arccos} [0, \pi]$$

Na sliki je v zeleni barvi narisan odsek originalne funkcije $\cos x$, z modro pa njen inverz $\arccos x$. Kot za druge med sabo inverzne funkcije velja

$$y = \arccos x \iff \cos y = x$$

Velja tudi $\mathcal{D}_{\text{arccos}} = [-1, 1]$, $\mathcal{Z}_{\text{arccos}} = [0, \pi]$.

Velja enakost $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Dokaz: V pravokotnem trikotniku s poljubnima kotoma α, β, hipotenuzo 1 in kateto x velja $\sin \alpha = x$ in $\cos \beta = x$. Torej $\alpha = \arcsin x$ in $\beta = \arccos x$. Ker je $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, je s tem dokaz že končan.



Krožne funkcije - $\mathrm{arctan}x$ in $\mathrm{arccot}x$

Podobno kot za sinus in kosinus definiramo inverzne funkcije tudi za tangens in kotangens.

Tangens in kotangens sta bijektivni funkciji

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \xrightarrow{\tan} [-\infty, \infty]$$
$$[0, \pi] \xrightarrow{\cot} [-\infty, \infty]$$

zato lahko definiramo bijektivni funkciji

$$[-\infty, \infty] \xrightarrow{\mathrm{arctan}} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$[-\infty, \infty] \xrightarrow{\mathrm{arccot}} [0, \pi]$$

Velja torej

- $y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x$
- $\mathcal{D}_{\mathrm{arctan}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_{\mathrm{arctan}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- $y = \mathrm{arccot}x \Leftrightarrow \cot y = x$
- $\mathcal{D}_{\mathrm{arccot}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_{\mathrm{arccot}} = (0, \pi)$

Dinamična vizualizacija inverznih kotnih funkcij na https://ggbm.at/bwrbzm3y v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

Nekatere vrednosti krožnih funkcij

x	$\arcsin x$	$\arccos x$
0	0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{2}$	0

x	$\mathrm{arctan} x$	$\mathrm{arccot} x$
0	0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
∞	$\frac{\pi}{2}$	0

Funkcije - limite

Limita funkcije

Limita funkcije v neki točki pove kako se funkcija v okolici te točke obnaša. V tej točki funkcija lahko sploh ni definirana.

Limita funkcije $f(x)$ v točki a je število, kateremu se vrednosti $f(x)$ približujejo, ko se vrednost argumenta x približuje vrednosti a. Zapišemo

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

in preberemo "limita $f(x)$, ko gre x proti a".

Natančna **matematična definicija limite**: Število L je limita funkcije $f(x)$, ko se x približuje a, če za vsako število $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da velja

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Intuitivno to pomeni, da če bo x dovolj blizu a bo tudi $f(x)$ poljubno blizu L.

Limita funkcije intuitivno

Če je funkcija 'lepa' kot so običajne funkcije, na primer polinomi ali druge 'zvezne' funkcije (graf je nepretrgana krivulja), je limita take funkcije v vsaki točki kar njena vrednost. Očitno je namreč, da se vrednosti funkcije približujejo vrednosti funkcije v točki, ko se argument približuje dani točki.

Limite postanejo pomembne v posebnih točkah v katerih nam šele limita pomaga opisati, kaj se s funkcijo v bližini dane točke pravzaprav dogaja.

Primeri

Poglejmo funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x}$, $g(x) = \frac{x}{x}$ in $h(x) = \frac{x}{x^2}$ in se vprašajmo, kaj so limite teh treh funkcij pri $x = 0$, oziroma, kako se funkcije obnašajo v okolici točke $x = 0$.

Čeprav nobena od treh funkcij v točki $x = 0$ ni definirana, je v tem primeru lahko ugotoviti

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \lim_{x\to 0} g(x) = 1 \text{ in } \lim_{x\to 0} h(x) = \pm\infty.$$

Za funkcijo $h(x)$ rečemo tudi, da limita, ko se x približuje 0 ne obstaja. Z zapisom $\lim_{x\to 0} h(x) = \pm\infty$ smo o obnašanju funkcije v okolici $x = 0$ želeli povedati še več kot to, da limita ne obstaja. Namreč, če v zgornjih treh funkcijah krajšamo x, kar smemo narediti z opombo, da pri $x = 0$ pač funkcije niso definirane, dobimo

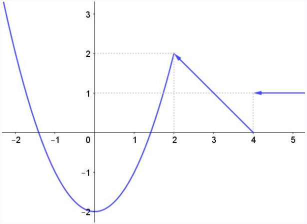
$$f(x) = x \text{ za } x \neq 0; g(x) = 1 \text{ za } x \neq 0 \text{ in } h(x) = \frac{1}{x}$$

Primer

Funkcija podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 2, \\ -x + 4, & 2 < x \leq 4, \\ 1, & 4 < x \end{cases}$$

ima graf



- Taki funkciji rečemo, da je odsekoma definirana (ker je definirana po odsekih z ločenim predpisom).
- Funkcija $f(x)$ je definirana povsod: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ ne obstaja: Če se x približuje vrednosti 4 iz desne, je $f(x)$ konstantno enaka 1. Če pa se x približuje vrednosti 4 iz leve, se $f(x)$ približuje vrednosti $f(4) = 0$.
- V vseh ostalih točkah ($a \neq 4$) limita funkcije obstaja: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Leva in desna limita

Intuitivno je lahko razumeti pojma leve in desne limite.

Leva limita je vrednost, kateri se funkcija približuje, ko se vrednosti x-a približujejo dani točki iz leve strani. Oznaka:

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) \quad \text{ali} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Desna limita je vrednost, kateri se funkcija približuje, ko se vrednosti x-a približujejo dani točki iz desne strani. Oznaka:

$$\lim_{x \searrow a} f(x) \quad \text{ali} \quad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

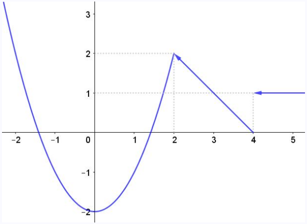
Funkcija ima v dani točki **limito**, če **sta** v tej točki **leva** in **desna limita enaki**.

V primeru funkcije $f(x)$ v zgornjem primeru velja

$$\lim_{x \nearrow 4} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \searrow 4} f(x) = 1$$

V točki $x = 4$ torej funkcija nima limite.



Še nekaj primerov

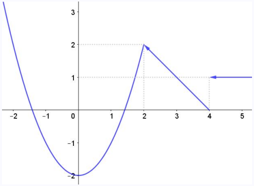
- Ko računamo limite funkcij (podobno kot pri zaporedjih), smemo krajšati, saj je pri limiti vedno vprašanje kako se funkcija obnaša ob ‘približevanju’ in ne ob sami vrednosti, ki je mogoče enaka 0.
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$
- V točkah, kjer je $f(x)$ zvezna, limita $f(x)$ vedno obstaja in je enaka funkcijski vrednosti. Npr. za $a \neq 1$ je $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{a-1}{a^2-1} = \dfrac{1}{a+1}$.

Limite $x \longrightarrow \infty$

- Podobno kot pri zaporedjih lahko obravnavamo tudi obnašanje funkcij, ko gre argument v neskončnost. Z limito to zapišemo $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ali $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-x}{1-2x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3}-2} = -\dfrac{1}{2}$

Zvezne funkcije

- Funkcija je na intervalu zvezna, če je na tem intervalu graf funkcije ‘nepretrgana’ (zvezna) krivulja.
- Funkcija je na nekem intervalu zvezna, če v vsaki točki intervala limita funkcije obstaja (leva in desna limita sta enaki) in je kar enaka vrednosti funkcije.
- Če je f zvezna v točki a potem se vrednost $f(x)$ v bližnjih točkah zelo malo razlikuje of $f(a)$.
- Če sta f in g zvezni funkciji v točki a, potem so tudi αf (α je število), $f+g$, $f \cdot g$ zvezne funkcije v točki a. Funkcija $\frac{f}{g}$ je tudi zvezna v a, če le $g(a) \neq 0$.



- Funkcija iz zgornjega primera je zvezna v vseh točkah razen v točki $x = 4$.
- Če je f zvezna na zaprtem intervalu $[a, b]$ in je $f(a)f(b) < 0$, potem obstaja točka $c \in [a, b]$, kjer je $f(c) = 0$. Pogoj $f(a)f(b) < 0$ pomeni, da sta vrednosti $f(a)$ in $f(b)$ različno predznačeni in ker je funkcija zvezna, mora nekje sekati x-os.

Še dve limiti

Nekaterim funkcijam je limito nemogoče določiti s preprostimi metodami, kot je krajšanje. Primera takih limit sta

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{in} \quad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}.$$

Velja

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{in} \quad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \simeq 2.71828.$$

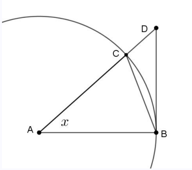
Opozorilo.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

velja samo za x v radianih. Če je x v stopinjah dobimo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\pi}{180}.$$

Dokaz $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$



V enotski krožnici narišimo poljuben kot x kot kaže slika in izračunajmo ter primerjajmo ploščine trikotnikov ΔABC in ΔABD ter ploščino krožnega izseka $\triangledown ABC$. Geometrijsko je očitno, da za vsak x velja

$$\Delta ABC \leq \triangledown ABC \leq \Delta ABD$$

Razmislimo: $\Delta ABC = \frac{\sin(x)}{2}$ in $\Delta ABD = \frac{\tan(x)}{2}$. Medtem ko je $\triangledown ABC = \frac{x}{2}$, če smo kot merili v radianih in $\triangledown ABC = \frac{\pi x}{360}$, če smo kot merili v stopinjah. Torej

$$\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \quad \text{in} \quad \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2}$$

in če poračunamo

$$\frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \quad \text{in} \quad \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x}$$

oziroma

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

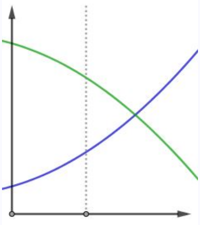
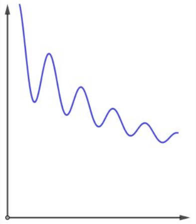
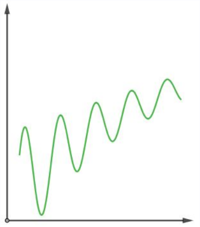
Ker je $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$, je tudi $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. S povsem podobnim sklepanjem bi dobili, da je $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\pi}{180}$, ko v primeru uporabe stopinj vzamemo $\triangledown ABC = \frac{\pi x}{360}$.

Odvod

Kaj je odvod funkcije?

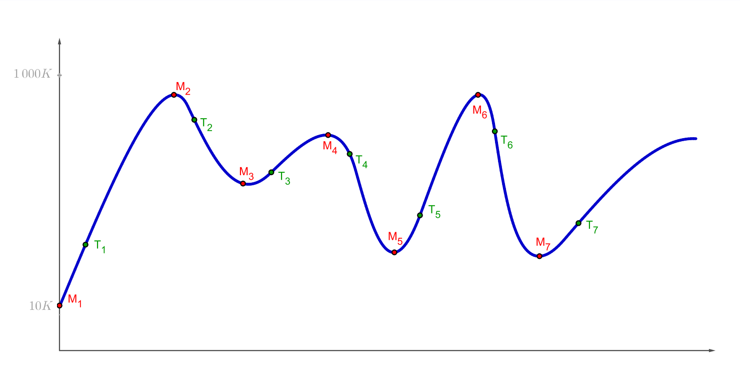
Odvod funkcije pove, kako se funkcija spreminja. Pogosto je stopnja spreminjanja funkcije pomembnejša od same vrednosti funkcije. Odvod funkcije v dani točki tako npr. lahko opisuje 'napredovanje' ali 'nazadovanje' v nekem trenutku, medtem ko vrednost funkcije opisuje le trenutno stanje.

Opazujmo in komentirajmo grafe, ki zaporedoma ponazarjajo razvoj dveh držav ali temperaturo dveh bolnikov, dinamiko dveh različnih razvojev ...

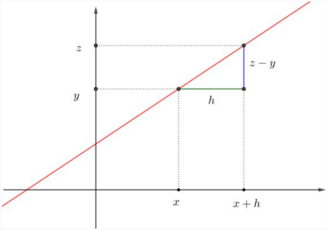
Ocenimo poslovanje

Na spodnjem grafu je ponazorjeno poslovanje podjetja v daljšem časovnem obdobju. Na x-osi je čas, na y-osi pa 'pozitivna bilanca podjetja'. Točke M_1 do M_7 ponazarjajo trenutke prevzema vodenja podjetja s strani menedžerjev M_1 do M_7. V točkah T_1 do T_7 primerjajmo 'bilanco podjetja' in 'uspešnosti dela menedžerjev'.



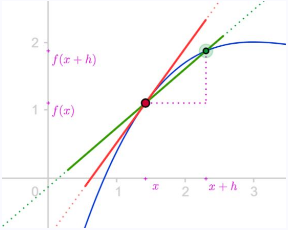
- Dinamična vizualizacija strmine na krivulji: https://www.geogebra.org/m/njvfhwpt v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

Smerni koeficient premice



Smerni koeficient k premice skozi dve dani točki (x, y) in $(x + h, z)$ je enak $k = \frac{z-y}{h}$.

Smerni koeficient sekante



Smerni koeficient 'sekante' (na sliki) skozi točki $(x, f(x))$ in $(x+h, f(x+h))$ je enak $k = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Čim manjši je h tem bolj se sekanta približa tangenti. Zato je smerni koeficient tangente enak

$$k_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

- Dinamična vizualizacija: https://ggbm.at/qzee9wy8 V https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

Odvod

Smerni koeficient tangente v dani točki pove, kako se v tej točki funkcija spreminja. Imenujemo ga **odvod** in označimo $f'(x)$. Torej zapišemo

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Odvod funkcije $f(x)$ je torej definiran kot

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

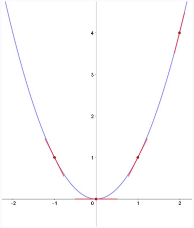
Primer

- Izračunajmo $f'(x)$ za $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} f'(x) \quad &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x + h}{1} = 2x \end{aligned}$$

- Torej je odvod funkcije $f(x) = x^2$ funkcija $f'(x) = 2x$.
- Funkcija $f(x) = x^2$ ima v vsaki točki (a, a^2) strmino enako $2a$.
- Poglejmo kakšne so strmine v nekaj točkah

točka	strmina
$(0,0)$	0
$(1,1)$	2
$(-1,1)$	-2
$(2,4)$	4



Primer

Izračunajmo $f'(x)$ za $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

Primer

Izračunajmo $f'(x)$ za $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{(x+h)xh} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

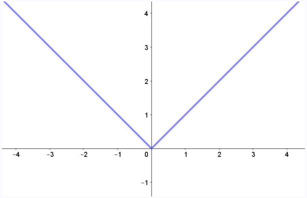
1. Razmislimo geometrijsko, zakaj za $f(x) = x$ velja $f'(x) = 1$.
2. Razmislimo geometrijsko, zakaj za $f(x) = c$ velja $f'(x) = 0$.

Lahko odvod vedno izračunamo?

NE! Včasih ali vsaj v posameznih točkah odvoda za nekatere funkcije ni mogoče izračunati. Funkcija v neki točki ni odvedljiva, če v tej točki limita

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ne obstaja.



Na primer, za funkcijo $f(x) = |x|$ ta limita v točki $x = 0$ ne obstaja. Leva limita je -1 in desna limita je 1. Funkcija ni odvedljiva. Geometrijsko obstoj odvoda v neki točki pomeni 'gladkost', oziroma, da v tej točki lahko določimo strmino krivulje. V primeru $f(x) = |x|$ vidimo, da v točki $x = 0$ ne moremo govoriti o strmini: na levi je strmina enaka -1 na desni pa 1.

Odvedljive funkcije

Rečemo, da je funkcija **odvedljiva** na intervalu $[a, b]$, če lahko izračunamo njen odvod v vsaki točki intervala $[a, b]$.

Odvedljiva funkcija na intervalu $[a, b]$ je na tem intervalu zvezna (nepretrgana) in 'gladka'.

Tabela odvodov elementarnih funkcij

f(x)	f'(x)
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \log a$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \log a}$
$\sin x$	$\cos x$

f(x)	f'(x)
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{(\sin x)^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Vse te formule sledijo, oziroma so izračunane po definiciji odvoda:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Opozorilo: Formule za odvode kotnih funkcij veljajo za kotne funkcije v radianih. V stopinjah te formule ne veljajo. Na primer za funkcijo $f(x) = \sin(x)$ v stopinjah velja $\big(sin(x^o)\big)' = \frac{\pi}{180}\cos(x^o)$.

Pravila za računanje odvodov funkcij

Če sta f in g odvedljivi funkciji, potem velja

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, kjer $g(x) \neq 0$
- $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x)$ (**posredno odvajanje**)

Tudi vse te formule sledijo iz definicije odvoda:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Posredno odvajanje

- Formula za posredno odvajanje je še posebej pomembna in jo zelo pogosto uporabljamo. Formulo lahko ponazorimo 'grafično':

$$\left(f\left(\boxed{}\right)\right)' = f'\left(\boxed{}\right) \cdot \boxed{}\,'$$

- Primer: Izračunati želimo odvod funkcije $f(x) = \sin(\log x)$.

$$\left(\sin\left(\boxed{\log x}\right)\right)' = \cos\left(\boxed{\log x}\right) \cdot \boxed{\log x}\,' = \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\log x)}{x}$$

Primer

- Izračunajmo $(a^x)'$, če vemo, da je $(e^x)' = e^x$?
  - $a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$
  - $(a^x)' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} \log a = a^x \log a$
- Izračunajmo $(\log_a x)'$, če vemo, da je $(\log x)' = \frac{1}{x}$?
  - $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$
  - $(\log_a x)' = (\frac{\log x}{\log a})' = \frac{(\log x)'}{\log a} = \frac{1}{x \log a}$

Primeri

Izračunajmo odvode:

1. $f(x) = \sqrt{x}$

   $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

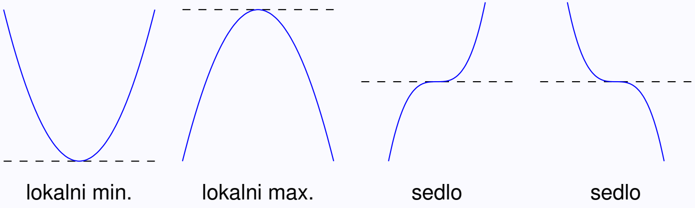
$$\begin{aligned}(\sqrt{x^2-1})' &= ((x^2-1)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2-1)' = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2-1})^{-1} \cdot (2x) = \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\end{aligned}$$

Uporaba odvoda

S pomočjo odvoda določimo **naraščanje** in **padanje** funkcij ter **ekstreme** in **stacionarne točke**.

- Če je $f'(x_0) > 0$, je f v točki x_0 naraščajoča.
- Če je $f'(x_0) < 0$, je f v točki x_0 padajoča.
- Če je $f'(x_0) = 0$, ima f v točki x_0 **stacionarno** točko: **minimum**, **maksimum** ali **prevoj** (sedlo). V stacionarni točki je tangenta na graf vodoravna.

Primeri stacionarnih točk



Višji odvodi

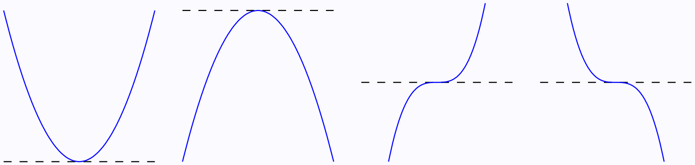
Funkcije lahko odvajamo tudi večkrat.

- Če odvod funkcije f' še enkrat odvajamo, dobimo **drugi odvod** funkcije

$$f''(x) = (f')'(x).$$

- Če je $f'(x_0) = 0$ in $f''(x_0) > 0$, potem je v x_0 lokalni minimum.
- Če je $f'(x_0) = 0$ in $f''(x_0) < 0$, potem je v x_0 lokalni maksimum.
- Če je $f'(x_0) = 0$ in $f''(x_0) = 0$, potem iz teh podatkov še ne znamo ugotoviti ali je v x_0 minimum, maksimum ali sedlo. Če je $f'''(x_0) \neq 0$ potem je v x_0 sedlo. Če pa je tudi $f'''(x_0) = 0$, moramo obravnavati še višje odvode. Sklepamo pa podobno kot pri zgornji uporabi prvega in drugega odvoda, le da uporabimo 'lihi' namesto 'prvi' in 'sodi' namesto 'drugi' odvod.

Primeri stacionarnih točk - ponovno

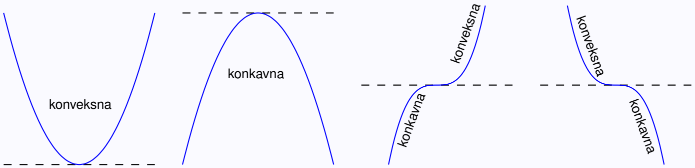


lokalni min.	lokalni max.	sedlo	sedlo
$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$
$f''(x_0) > 0$	$f''(x_0) < 0$	$f''(x_0) = 0$	$f''(x_0) = 0$

Uporaba odvodov za risanje grafov

- Prvi odvod nam pove, kje funkcija narašča, kje pada in kje so stacionarne točke,
- Drugi odvod pove, kako se graf krivi:
    - kjer je $f''(x) \geq 0$, je f **konveksna**, graf funkcije f leži nad tangento grafa,
    - če je $f''(x) \leq 0$, je f **konkavna**, graf funkcije f leži pod tangento grafa.

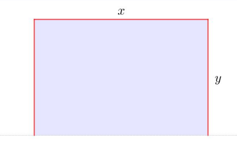
Uporaba odvodov za risanje grafov - primeri



lokalni min.	lokalni max.	sedlo	sedlo
$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$
$f''(x_0) > 0$	$f''(x_0) < 0$	$f''(x_0) = 0$	$f''(x_0) = 0$

Primer uporabe odvoda

Ob ravnem zidu želimo z 10 metrov dolgo ograjo zagraditi pravokoten prostor (kot kaže slika). Kakšen pravokotnik naj zagradimo, da bo ploščina ograjenega prostora največja?



- Z x označimo širino in z y višino ograjenega prostora.
- Potrebujemo $2y + x = 10$ metrov ograje. Torej $y = 5 - \frac{x}{2}$.

- Površina je $P = x \cdot y$. Torej $P(x) = x \cdot (5 - \frac{x}{2}) = 5x - \frac{1}{2}x^2$.
- Ekstrem bo dosežen pri $P'(x) = 5 - x = 0$. Torej $x = 5$ in $y = 2.5$.
- Rešitev je pravokotnik dimenzij 5×2.5.

Primer

Raziščimo stacionarne točke funkcije $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

- Izračunamo $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x_1 = 1$ in $x_2 = -1$.
- $f''(x) = 6x \Longrightarrow f''(1) > 0$ in $f''(-1) < 0$.
- $(1, 0)$ je **minimum**. $(-1, 4)$ je **maksimum**.

Primer

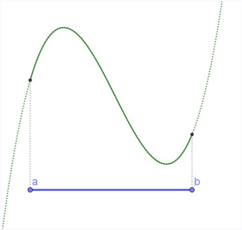
Kakšne oblike naj bo valjasta pločevinka s prostornino 1l, da bomo za izdelavo porabili najmanj pločevine?

- Če ima pločevinka premer $2r$ in višino v je njena prostornina $\pi r^2 v$. Ker 1 liter ustreza $1dm^3$, vzamemo za enoto decimeter. Torej $\pi r^2 v = 1$ in izrazimo $v = \frac{1}{\pi r^2}$.
- Površina je podana s formulo $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$. Torej $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\pi r}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$.
- $S'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} = 0 \Longrightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \simeq 0.54$.
- $v = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{\sqrt[3]{(2\pi)^2}}{\pi} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \simeq 1.08$
- Pločevinka bo torej imela premer in višino oboje enako $\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ dm, kar je 10.8 cm.

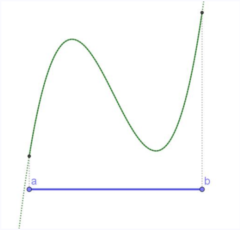
Globalni ekstremi

Odvedljiva funkcija doseže na zaprtem intervalu $[a, b]$ svoj maksimum in minimum

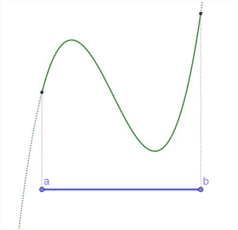
- v stacionarni točki ali
- na robu intervala



globalna ekstrema v stacionarnih točkah



globalna ekstrema na robu

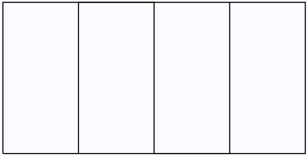


globalni max. na robu

globalni min. v stacionarni točki

Nekaj nalog za samostojno delo

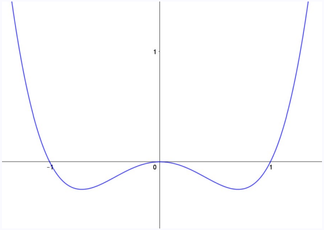
1. Za funkcijo $f(x) = x^4 - x^2$ določite ničle, intervale naraščanja in padanja, ekstreme, intervale konveksnosti in konkavnosti ter čimbolj natančno narišite graf.
2. Kolikšni sta najmanjša in največja vrednost funkcije $f(x) = x^3 - 3x + 2$ na intervalu $[0, 2]$?
3. Kmet želi ograditi pašnik s štirimi prekati (kot kaže slika). Na razpolago ima $6\,000m$ ograje. Kakšna naj bo ograjena površina, da bo površina pašnika največja?



Naloga 1.

- $f(x) = x^4 - x^2 = x^2(x-1)(x+1)$
- $f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)$
- $f''(x) = 12x^2 - 2$

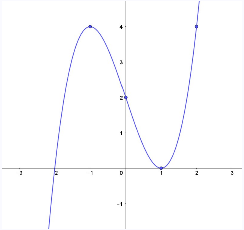
- Ničle: $0_{\ (2.st)}, 1_{\ (1.st)}, -1_{\ (1.st)}$
- Stacionarne točke: $(0,0)_{\text{ max}}, (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4})_{\text{ min}}, (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4})_{\text{ min}}$
- Pada: $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$; Narašča: $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$
- Konveksna: $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{6}}, \infty)$; Konkavna: $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$



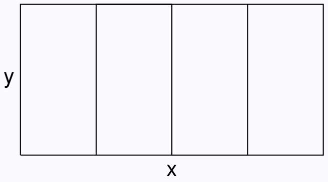
Naloga 2.

- $f(x) = x^3 - 3x + 2$
- $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$
- $f''(x) = 6x$

- Stacionarne točke: $(1,0)_{\text{min}}$, $(-1,4)_{\text{max}}$
- Na robovih $[0,2]$: $f(0) = 2$ in $f(2) = 4$
- Na $[0,2]$ funkcija zavzame minimalno vrednost 0 in maksimalno vrednost 4.



Naloga 3.



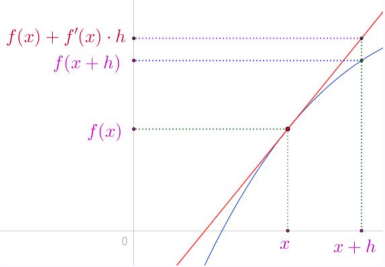
- $6\,000$ m = 6 km;
- Ograja: $2x + 5y = 6 \Longrightarrow y = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}x$
- Površina: $P(x) = x \cdot y = x \cdot (\frac{6}{5} - \frac{2}{5}x) = \frac{6x}{5} - \frac{2x^2}{5}$
- $P'(x) = \frac{6}{5} - \frac{4x}{5} = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2} = 1.5$ in $y = \frac{3}{5} = 0.6$

Približek z diferencialom

- Odvod funkcije f zapišemo tudi: $f' = \frac{dy}{dx}$ oziroma $dy = f'dx$. Pri tem ima 'dx' pomen 'majhne spremembe' ali diferenciala x-a, 'dy' pa 'majhne spremembe' y-a. Ker z y označujemo funkcijske vrednosti, lahko zapišemo tudi $df = f'dx$.
- Tangenta v $x_0 : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- Tangenta se blizu x_0 dobro prilega grafu f. Uporabimo jo za približke bližnjih vrednosti funkcije. **Pomembno je razumeti geometrijski pomen** $f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + f'(x_0)h$, oziroma

$$f(x + h) \simeq f(x) + f'(x)h$$

Geometrijski pomen diferenciala



- Velja $f(x + h) - f(x) \simeq f'(x)h$. Manjši kot je h boljši je približek.
- $df = f'dx$ velja natančno, ker je $h = dx$ infinitezimalno majhen.

Dinamična vizualizacija na https://ggbm.at/udtmjs5p v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

Primera

- S pomočjo diferenciala približno izračunajmo $\sqrt{0.98}$.

  Za $f(x) = \sqrt{x}$ bi radi približno izračunali $f(0.98)$.
  Ker je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, velja
  $f(0.98) = f(1 - 0.02) \doteq f(1) + f'(1)(-0.02) = 1 - \frac{0.02}{2} = 1 - 0.01 = 0.99.$
  Napaka, ki smo jo pri tem računu naredili je manjša od 0.0001.

- S pomočjo diferenciala približno izračunajmo $\sin(2^o)$.

  Za $f(x) = \sin x$ bi radi približno izračunali $f(\frac{2\pi}{180})$.
  (Ne pozabimo, da moramo računati v radianih.)
  Ker je $f'(x) = \cos x$, velja
  $f(\frac{2\pi}{180}) = f(0 + \frac{\pi}{90}) \doteq f(0) + f'(0)\frac{\pi}{90} = 0 + 1 \cdot \frac{\pi}{90} = \frac{\pi}{90} = 0.03490.$
  Napaka, ki smo jo pri tem računu naredili je manjša od 0.000001.

Približki s Taylorjevimi polinomi

- Z diferencialom smo dobili približek: $f(x_0+h) \simeq f(x_0) + f'(x_0)h$
- Podobno s pomočjo višjih odvodov dobimo še boljše približke:
$$f(x_0+h) \simeq f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}\cdot h + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)\cdot h^3}{3!} + \ldots$$
  - Znaku ('klicaju') rečemo **fakulteta**.
    Tako npr. 3! preberemo 'tri fakulteta'. Pomen je pa razviden iz naslednjih zapisov:
$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ 2! &= 2\cdot 1 = 2 \\ 3! &= 3\cdot 2\cdot 1 = 6 \\ 4! &= 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24 \\ &\ldots \end{aligned}$$
    Natančno pa lahko 'fakulteto' definiramo rekurzivno:
$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ n! &= n\cdot(n-1)! \end{aligned}$$

Približki s Taylorjevimi polinomi - nadaljevanje

- Če v formuli

$$f(x_0+h) \simeq f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}\cdot h + \frac{f''(x_0)\cdot h^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)\cdot h^3}{3!} + \dots$$

vzamemo $x_0 = 0$ in zapišemo $h = x$ (rečemo: približek ali razvoj v okolici 0) dobimo:

$$f(x) \simeq f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \frac{f'''(0)\cdot x^3}{3!} + \dots$$

- Rečemo, da funkcijo $f(x)$ aproksimiramo s (Taylorjevim) polinomom.
- Taylorjeve aproksimacije za nekatere znane funkcije:
  - $e^x \simeq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
  - $\sin x \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
  - $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$
  - Iz prvega izraza pri $x = 1$ lahko na primer dobimo približke za e:

$$e \simeq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Dinamična vizualizacija na https://ggbm.at/rnn2bknq v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

L'Hospitalovo pravilo

Odvod lahko pomaga izračunati tudi posamezne limite. Včasih lahko za izračun limite kvocienta uporabimo L'Hospitalovo pravilo, ki pravi: Če velja

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0, \text{ ali}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty,$$

potem velja

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Primer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

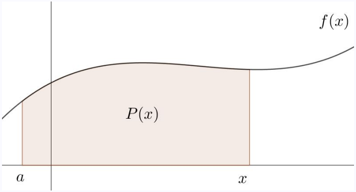
Primer

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

Še o funkcijah ...

Opazujmo pozitivno funkcijo f in njen graf. Ploščina pod grafom funkcije f je očitno odvisna od funkcije f.

Če opazujemo ploščino $P(x)$ pod grafom funkcije f od neke vrednosti (na primer a) do vrednosti x, ki se spreminja očitno dobimo neko novo funkcijo $P(x)$.



Razmislimo, kaj lahko povemo o tej funkciji? Zakaj je funkcija $P(x)$ naraščajoča (tudi če je $f(x)$ padajoča)?

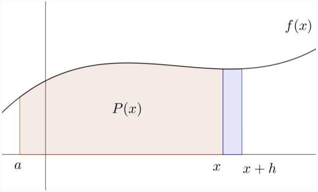
- Je mogoče, da čeprav o funkciji $P(x)$ ne vemo prav veliko, lahko ugotovimo kolikšen je njen odvod $P'(x)$?

Odvod funkcije ploščine pod grafom $f(x)$

- Spomnimo se, da je odvod funkcije $P(x)$ enak

$$P'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{P(x+h) - P(x)}{h}$$

- Ker funkcijo $P(x)$ poznamo predvsem iz slike si to narišimo (slika desno).
- Izraz $P(x+h) - P(x)$ ustreza ploščini 'modrega pravokotnika', ki je približno enaka $f(x) \cdot h$.
- Torej velja



$$P'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{P(x+h) - P(x)}{h} = f(x)$$

Odvod funkcije ploščine pod grafom $f(x)$ je kar ...

- Ugotovili smo torej, da je odvod funkcije ploščine pod grafom $f(x)$ kar funkcija $f(x)$.
- Kaj to pomeni?
- Ker je na primer $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, oziroma za $F(x) = \frac{x^3}{3}$ in $f(x) = x^2$ velja $F'(x) = f(x)$, nam funkcija $F(x)$ veliko pove o ploščini pod grafom funkcije $f(x)$.
- Ob pogledu na prejšnjo skico bi na primer $F(3)$ bila ploščina pod grafom $f(x)$ med a in 3. Lahko si predstavljamo, da je a dovolj daleč na levo, oziroma, da bi ploščino pod grafom $f(x)$ na primer med 1 in 3 izračunali preprosto z razliko $F(3) - F(1)$.
- Ploščino pod grafom $f(x) = x^2$ na primer na intervalu od 0 do 2 bi izračunali preprosto kot $F(2) - F(0) = \frac{8}{3}$, kjer je $F(x) = \frac{x^3}{3}$.
- Opazimo tudi, da bi povsem isti rezultat dobili, če bi vzeli $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$.

Nedoločeni integral

- Če velja
$$F'(x) = f(x)$$
potem je ploščina pod grafom $f(x)$ med a in b kar enaka
$$F(b) - F(a).$$
- Zato je pri dani funkciji $f(x)$ iskanje take funkcije $F(x)$, da velja $F'(x) = f(x)$ zelo pomembno.
- Pri dani funkciji $f(x)$ iskano funkcijo $F(x)$ imenujemo **primitivna funkcija funkcije** $f(x)$ ali **nedoločeni integral funkcije** $f(x)$.
- Nedoločeni integral funkcije $f(x)$ označimo z znakom
$$\int f(x)dx$$
- Opazimo, da če je $F(x)$ primitivna funkcija $f(x)$, je $F(x) + C$ tudi primitivna funkcija $f(x)$.

Lastnosti nedoločenega integrala

- Nedoločeni integral je torej pomemben postopek iskanja funkcije, ki omogoča izračun ploščine pod prvotno funkcijo.
- Nedoločeni integral ... pomeni iskanje funkcije, katere odvod bo prvotna funkcija.
- Tabela odvodov je, če jo razumemo v obratni smeri, hkrati tabela nedoločenih integralov.
- Lastnosti za nedoločen integral sledijo iz lastnosti odvoda. Na primer, ker velja

$$\big(F(x) + G(x)\big)' = F'(x) + G'(x)$$

velja tudi

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

In ker velja

$$\big(aF(x)\big)' = aF'(x),$$

velja tudi

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx.$$

Tabela elementarnih integralov

Iz tabele elementarnih odvodov sledi:

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \qquad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\ x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C \qquad \int \frac{-dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arccos x + C$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C \qquad \int \frac{-dx}{1 + x^2} = \mathrm{arcctg}\ x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log |x| + C$$

Opozorilo !

Razmislimo: Ali iz prejšnjih formul

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad \text{in} \qquad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C \quad \text{ter}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \quad \text{in} \qquad \int \frac{-dx}{1+x^2} = \operatorname{arcctg} x + C$$

sledi $\arcsin x = -\arccos x$ in $\arctan x = -\operatorname{arcctg} x$?

NE, velja pa, da se funkciji $\arcsin x$ in $-\arccos x$ ter $\arctan x$ in $-\operatorname{arcctg} x$ razlikujeta le za konstanto.

Dinamična vizualizacija https://www.geogebra.org/m/vphuw4vq V https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

Določeni integral

Spoznali smo in se dogovorili

- če velja $F'(x) = f(x)$ rečemo,
  - da je odvod funkcije $F(x)$ enak funkciji $f(x)$, ali tudi
  - da je funkcija $F(x)$ **nedoločeni integral** (ali **primitivna funkcija**) funkcije $f(x)$ in zapišemo
$$F(x) = \int f(x)dx;$$
  - in ploščina pod krivuljo $f(x)$ na intervalu od a do b je kar enaka $F(b) - F(a)$.
- Izraz
$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$
  imenujemo **določeni integral funkcije** $f(x)$ **v mejah od** a **do** b.
- Zapišemo tudi $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.
- Določeni integral $\int_a^b f(x)dx$ pomeni ploščino pod grafom $f(x)$ na intervalu od a do b.
- Formuli
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$
  rečemo tudi **Newton-Leibnizova formula**.

Nedoločeni integral kot 'določeni integral'

Za funkcijo $f(x)$ lahko nedoločeni integral

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

zapišemo tudi kot

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

je torej **nedoločeni integral** funkcije $f(x)$ - torej velja $F'(x) = f(x)$.

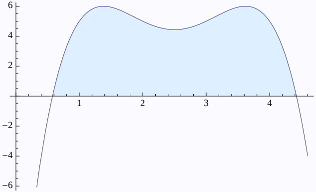
Ponovimo

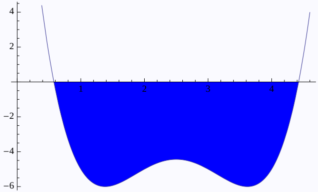
- Če velja $F'(x) = f(x)$ potem je ploščina pod grafom $f(x)$ med a in b kar enaka $F(b) - F(a)$.
- To velja tudi za funkcijo $f(x)$, ki ni nujno pozitivna, le da je treba na tistih delih, kjer je funkcija negativna, ploščino šteti negativno.
- Na primer za funkciji $F(x) = \frac{x^4}{4} - x$ in $f(x) = x^3 - 1$ velja $F'(x) = f(x)$. Če govorimo o ploščini 'pod $f(x)$' med 0 in 1 izračunamo $F(1) - F(0) = -\frac{3}{4}$, kar pomeni, da je ploščina med grafom $f(x)$ in koordinatnima osema enaka $\frac{3}{4}$, predznak pa pove, da je ta ploščina pod abscisno osjo, oziroma, da je na tem intervalu $f(x)$ negativna.

Določeni integral in ploščina

V kakšnem odnosu sta torej določeni integral funkcije in ploščina med x-osjo in funkcijo?

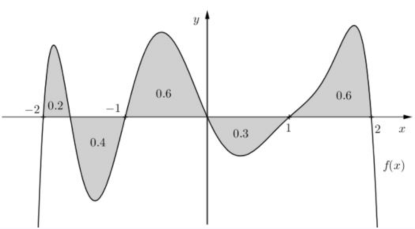
- Če je $f(x) \geq 0$ za vse $x \in [a,b]$, je $P = \int_a^b f(x)\,dx$,
- če je $f(x) \leq 0$ na $[a,b]$, je $P = -\int_a^b f(x)\,dx$.





Določeni integral in ploščina - nadaljevanje

Določeni integral funkcije 'ploščino nad x-osjo prišteva', 'ploščino pod x-osjo pa odšteva'. Ob primeru funkcije $f(x)$ na sliki,

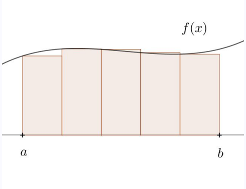


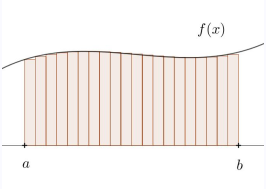
kjer so na grafu označene ustrezne ploščine 'krivočrtnih likov' lahko zapišemo naslednje določene integrale

- $\int_0^1 f(x)\,dx = -0.3$
- $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0.3$
- $\int_{-1}^2 f(x)\,dx = 0.9$
- $\int_1^2 f(x)\,dx = 0.6$
- $\int_0^2 f(x)\,dx = 0.3$
- $\int_{-2}^2 f(x)\,dx = 0.7$

Za dovolj lepo (na primer zvezno) funkcijo $f(x)$ na intervalu $[a, b]$

- najprej interval $[a, b]$ razdelimo na n pod-intervalov $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$,
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$
tako, da bo vsak interval vsak širine $\delta_n = \dfrac{b-a}{n}$.
- Za vsak $k = 0, 1, \dots, n-1$ izberemo neko vrednost $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ in
- zapišemo **integralsko vsoto** funkcije f kot $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\delta_n$.
- Če bi za $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ vsakič vzeli kar levi rob intervala, to je $c_k = x_{k-1}$, bi za primera $n = 5$ in $n = 20$ pomen integralske vsote lahko predstavili grafično kot naslednji ploščini

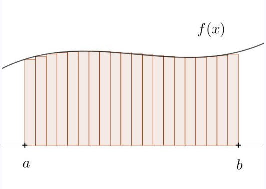




Drugi pogled na določeni integral - nadaljevanje

Določeni integral funkcije $f(x)$ na $[a, b]$ torej lahko razumemo tudi kot:

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, \mathbf{dx} = \lim_{\mathbf{n}\to\infty} \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{f}(\mathbf{c_i})\delta_{\mathbf{n}}$$



Intuitivno to pomeni, da ploščino pod krivuljo dobimo kot limito vsot 'ozkih pravokotnikov pod grafom funkcije', kjer limita pomeni, da vzamemo vse ožje in ožje pravokotnike, kot je nakazano na sliki.

Dinamična vizualizacija na https://ggbm.at/ctb25ktx v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

Primer

Izračunajmo na ta način določeni integral funkcije $f(x) = x$ na intervalu $[0, 3]$.

- Interval $[0, 3]$ razdelimo na n enakih delov. Vsak del ima širino $\delta_n = \frac{3}{n}$.
- Delilne točke so potem $i \cdot \frac{3}{n}$ za $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.
- Če za $c_i \in [(i-1) \cdot \frac{3}{n}, i \cdot \frac{3}{n}]$ vzamemo kar $c_i = i \cdot \frac{3}{n}$, potem je $f(c_i) = i \cdot \frac{3}{n}$ in $f(c_i)\delta_n = i \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{3}{n} = i\frac{9}{n^2}$.
- Dobimo

$$\int_0^3 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i\frac{9}{n^2} = 9 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i = 9 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{9}{2}.$$

- Rezultat ustreza določenemu integralu izračunanemu po Newton-Leibnizovi formuli

$$\int_0^3 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{9}{2}.$$

Naloge

Izračunajmo

$$\int (1 - x^2)^2 \, dx$$

$$\int_0^1 (1 - x^2)^2 \, dx$$

$$\int_0^2 (1 - x^2)^2 \, dx$$

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 \, dx$$

$$\int_{-2}^2 (1 - x^2)^2 \, dx$$

Izračunamo nedoločeni ntegral

$$\int (1 - x^2)^2 \, dx = \int (1 - 2x^2 + x^4) \, dx = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + C.$$

Od tu dobimo

$$\int_0^1 (1-x^2)^2\,dx = \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - (0 - 0 + 0) = \frac{8}{15}$$

$$\int_0^2 (1-x^2)^2\,dx = \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2 = 2 - \frac{16}{3} + \frac{32}{5} - (0 - 0 + 0) = \frac{46}{15}$$

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^2\,dx = \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-1}^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - (-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}) = \frac{16}{15}$$

$$\int_{-2}^2 (1-x^2)^2\,dx = \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-2}^2 = 2 - \frac{16}{3} + \frac{32}{5} - (-2 + \frac{16}{3} - \frac{32}{5}) = \frac{92}{15}$$

Še nekaj metod za računanje (določenih) integralov

Uvedba nove spremenljivke

- Iz pravila za posredno odvajanje dobimo pravilo za **uvedbo nove spremenljivke** pri računanju nedoločenega integrala:

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Pri tem je dobro du v drugem integralu razumeti kot $du = u'(x)\,dx$, kar ustreza diferencialu funkcije $u(x)$.

Primer 1

Izračunajmo

$$\int \tan x\,dx$$

- Zapišimo $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$
- Uvedemo novo spremenljivko $u(x) = \cos x$.
- Izračunamo $du = (\cos x)'dx = -\sin x\,dx$
- Torej velja $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du$
- Izračunamo integral $-\int \frac{1}{u}\,du = -\log|u| + C$.
- Ponovno upoštevamo, da je $u(x) = \cos x$ in dobimo $\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + C$.

Primer 2

Izračunajmo $\int x\cos(x^2)\,dx$

- Uvedemo novo spremenljivko $u(x) = x^2$.
- Izračunamo $du = 2xdx$
- Torej velja $\int x\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{2}\sin(u) + C = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$.

Primer 3

Izračunajmo $\int \frac{e^x}{1+2e^x}\,dx$.

- Uvedemo novo spremenljivko $u(x) = 1 + 2e^x$.
- Izračunamo $du = 2e^x dx$
- Torej velja
  $\int \frac{e^x}{1+2e^x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\log|u| + C = \frac{1}{2}\log|1+2e^x| + C = \frac{1}{2}\log(1+2e^x) + C$.

Primeri za vajo (z uvedbo nove spremenljivke)

$$\int \sqrt{2x-5}\,dx, \qquad \int \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx, \qquad \int \frac{dx}{x+1}, \qquad \int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx, \qquad \int \cos^3(x)\,dx$$

Računanje integralov 'po delih' - 'per partes'

Iz pravila za odvajanje produkta dobimo pravilo za integriranje po delih (**per partes**)

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

oziroma

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Primer 1

Izračunajmo $\int x \cdot e^x\,dx$.

- Zapišemo, oziroma uvedemo novi spremenljivki

$$\begin{array}{cc} u = x & dv = e^x\,dx \\ \downarrow & \downarrow \\ du = dx & v = e^x \end{array}$$

- Dobimo $\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x + C$.

Primer 2

Izračunajmo $\int \log x \, dx$.

- Zapišemo, oziroma uvedemo novi spremenljivki

$$\begin{array}{ccc} u = \log x & & dv = dx \\ \downarrow & & \downarrow \\ du = \frac{dx}{x} & & v = x \end{array}$$

- Dobimo $\int \log x \, dx = x \cdot \log x - \int dx = x \cdot \log x - x + C$.

Primer 3

Izračunajmo $\int x \cdot \log x \, dx$.

- Zapišemo, oziroma uvedemo novi spremenljivki

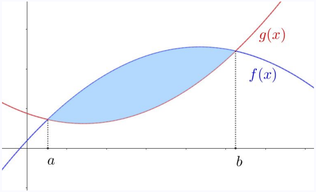
$$\begin{array}{ccc} u = \log x & & dv = x \, dx \\ \downarrow & & \downarrow \\ du = \frac{dx}{x} & & v = \frac{x^2}{2} \end{array}$$

- Dobimo $\int x \cdot \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \log x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \log x - \frac{x^2}{4} + C$.

Še o ploščini

Ploščina med grafoma $y = f(x)$ in $y = g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ za $x \in [a, b]$, je enaka

$$P = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx$$

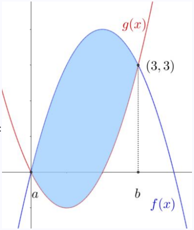


Primer

Kolikšna je ploščina med grafoma funkcij $f(x) = 4x - x^2$ in $g(x) = x^2 - 2x$?

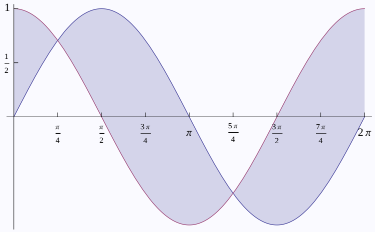
- Narišemo funkciji $f(x)$ in $g(x)$.
- Dločimo presečišči $(0,0)$ in $(3,3)$.
- Izračunamo

$$\begin{aligned}\int_0^3 \big(f(x) - g(x)\big)\, dx &= \int_0^3 \big(4x - x^2 - (x^2 - 2x)\big)\, dx = \\ &= \int_0^3 \big(6x - 2x^2)\big)\, dx = \\ &= \big(3x^2 - \tfrac{2}{3}x^3\big)\Big|_0^3 = 27 - 18 = 9\end{aligned}$$



Primer

Kako bi določili ploščino med krivuljama $f(x) = \sin x$ in $g(x) = \cos x$ na intervalu $[0, 2\pi]$?



- Določimo kje je $f(x) > g(x)$ in kje $f(x) < g(x)$.
- Zapišemo
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos x - \sin x\right) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\sin x - \cos x\right) dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \left(\cos x - \sin x\right) dx =$$
$$= \left(\sin x + \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(\cos x + \sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + \left(\sin x + \cos x\right)\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} =$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0+1) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (0+1) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}.$$
- Iz geometrijskega razumevanja lahko poenostavimo in ugotovimo, da je iskana ploščina enaka $2 \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\sin x - \cos x\right) dx = 4\sqrt{2}$.

Lastnosti določenega integrala

- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- Če je f liha, je $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.
- Če je f soda, je $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

Povprečna vrednost funkcije

Povprečna vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$ je

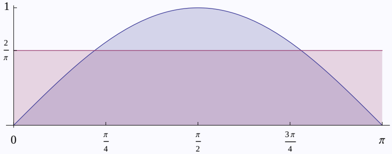
$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

μ je višina pravokotnika z osnovnico $[a, b]$, ki ima ploščino enako kot območje pod grafom $y = f(x)$.

Primer

Ploščina pod krivuljo $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ je enaka

$$\int_0^\pi \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 2.$$



Isto ploščino ima na tem intervalu konstantna funkcija z vrednostjo $\mu = \frac{2}{\pi}$.

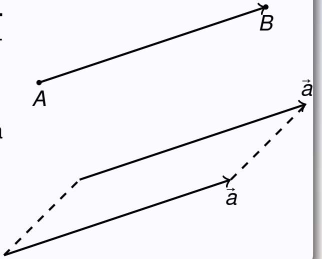
Zato rečemo, da ima funkcija $\sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ povprečno vrednost $\mu = \frac{2}{\pi}$.

Uporaba integrala

- Ploščine likov omejenih s krivuljami.
- Prostornina vrtenine, ki jo dobimo z vrtenjem grafa funkcije $f(x) > 0$ na intervalu $[a, b]$ okrog x-osi je podana s formulo $\pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$.
- Dolžina loka grafa $y = f(x)$, na intervalu $[a, b]$ je podana s formulo $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.
- Površina plašča vrtenine, ki jo dobimo z vrtenjem grafa funkcije $f(x) > 0$ na intervalu $[a, b]$ okrog x-osi je podana s formulo $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

Kaj so vektorji?

- **Vektor** je določen s smerjo in dolžino.
- Lahko rečemo tudi, da dve točki določata **vektor**. Poljubni točki A (začetna) in B (končna) določata **vektor**.
- Dva vektorja, ki sta vzporedna in enako dolga sta enaka. (Imata isto smer in dolžino!)

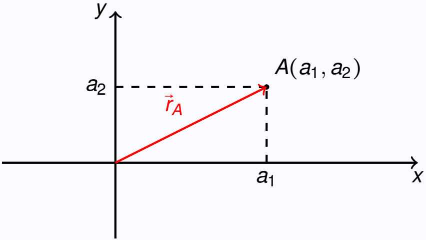


Vektorji v ravnini ali prostoru

- Vektorje v ravnini zapišemo s koordinatama $\overrightarrow{a} = (a, b)$. Vektor $\overrightarrow{a} = (a, b)$ pomeni vektor od točke $(0, 0)$ do točke (a, b).
- Vektorje v prostoru zapišemo s koordinatami $\overrightarrow{a} = (a, b, c)$. Vektor $\overrightarrow{a} = (a, b, c)$ pomeni vektor od točke $(0, 0, 0)$ do točke (a, b, c).
- a_1, a_2, a_3 so **koordinate** ali **komponente** vektorja $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Krajevni vektor

- Vektor $\vec{r}_A = (a_1, a_2)$ v ravnini imenujemo **krajevni vektor** točke $A(a_1, a_2)$.
- Vektor $\vec{r}_A = (a_1, a_2, a_3)$ v prostoru imenujemo **krajevni vektor** točke $A(a_1, a_2, a_3)$.
- Geometrijski pomen

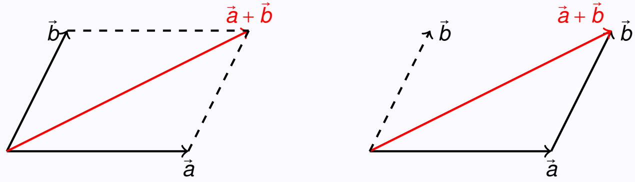


Seštevanje vektorjev

Vektorje seštevamo po komponentah.

- Za $\vec{a} = (a_1, a_2)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2)$ je
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$
- Za $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$
- Na primer za $\vec{a} = (1, 2)$ in $\vec{b} = (3, -1)$ je $\vec{a} + \vec{b} = (4, 1)$.
- Na primer za $\vec{a} = (1, 2, 3)$ in $\vec{b} = (3, -1, 1)$ je $\vec{a} + \vec{b} = (4, 1, 4)$.

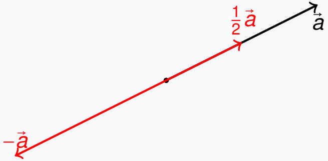
Grafični pomen seštevanja vektorjev



Množenje vektorja s številom (skalarjem)

Vektor množimo s številom tako, da njegove komponente množimo s tem številom.

- Za $\vec{a} = (a_1, a_2)$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (a_1, a_2) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2)$.
- Za $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (a_1, a_2, a_3) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3)$.
- Na primer za $\vec{a} = (2, 1)$ in $\alpha = -1$ dobimo $-1 \cdot (2, 1) = (-2, -1)$.
- Na primer za $\vec{a} = (2, 1)$ in $\alpha = \frac{1}{2}$ dobimo $\frac{1}{2} \cdot (2, 1) = (1, \frac{1}{2})$
- Na primer za $\vec{a} = (1, 2, 3)$ in $\alpha = 3$ dobimo $3 \cdot (1, 2, 3) = (3, 6, 9)$
- Geometrijski pomen (na primer za $\frac{1}{2}\vec{a}$ in $-\vec{a}$) :



Lastnosti seštevanja vektorjev

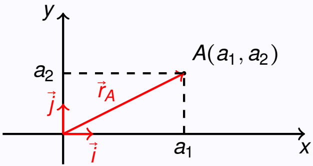
Za seštevanej vektorjev očitno veljajo lastnosti

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$
- Za ničelni vektor $\vec{0} = (0, 0)$ v ravnini in $\vec{0} = (0, 0, 0)$ v prostoru velja
  - $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
  - $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$
- $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Vektorji v ravnini

V ravnini $\mathbb{R}^2$ imamo običajni **koordinatni sistem** s pravokotnima vektorjema $\vec{i} = (1, 0)$ in $\vec{j} = (0, 1)$. S pomočjo vektorjev $\vec{i}$ in $\vec{j}$ lahko izrazimo vse ostale vektorje:

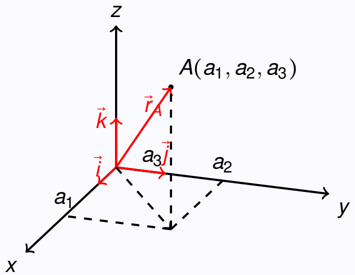
$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1 \cdot (1, 0) + a_2 \cdot (0, 1) = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}$$



Vektorji v prostoru

V prostoru $\mathbb{R}^3$ imamo običajni **koordinatni sistem** s pravokotnimi vektorji $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ in $\vec{k} = (0, 0, 1)$. S pomočjo vektorjev $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$ lahko izrazimo vse ostale vektorje:

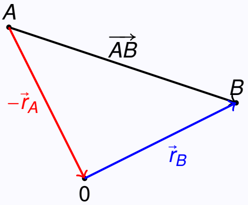
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}$$



Vektor med točkama

Vektor $\overrightarrow{AB}$, ki se začne v točki A in konča v točki B določimo

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$



Na primer, za $A = (2, -1, 3)$ in $B = (3, -2, 1)$ je

$$\overrightarrow{AB} = (3, -2, 1) - (2, -1, 3) = (1, -1, -2).$$

Naloge za vajo

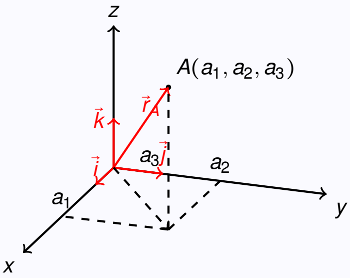
- Zapišimo vektor od $A(1,2,3)$ do $B(3,0,-1)$.
- Zapišimo točko, ki leži točno na sredini med $A(1,2,3)$ in $B(3,0,-1)$.
- Če sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ krajevna vektorja točk A in B, razmislimo, kaj pomeni
  - $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$
  - $\{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1\}$
  - $\vec{a} + 3(\vec{b} - \vec{a})$
  - $\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})$
  - $\{\vec{a} + \alpha(\vec{b} - \vec{a}), \alpha \in \mathbb{R}\}$
  - $\{\vec{a} + \alpha(\vec{b} - \vec{a}), 0 \leq \alpha \leq 1\}$

Dolžina vektorja

Dolžino vektorja $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ označimo z $|\vec{a}|$ (ali tudi z $\|\vec{a}\|$). Velja

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

To sledi iz grafičnega razumevanja pomena vektorja



in Pitagorovega izreka.

Enotski vektor

Vektorju, katerega dolžina je enaka 1, pravimo **enotski** (ali **normiran**) vektor.

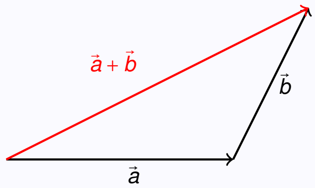
Primer: Vektor $\vec{n}_a = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ je enotski vektor, ki ima isto smer kot vektor $\vec{a} = (1, -1, 1)$. Rečemo tudi, da je $\vec{n}_a$ enotski vektor vektorja $\vec{a}$.

Trikotniška neenakost

Za poljubna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ velja (**trikotniška neenakost**)

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|,$$

Trikotniška neenakost sledi iz razumevanja grafičnega pomena vsote dveh vektorjev:



Kolinearnost, komplanarnost in linearna kombinacija vektorjev

- Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta **kolinearna** (ali **vzporedna**), če obstajata taki števili (skalarja) α in β, da velja
$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0.$$
- Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so **komplanarni** (ali **ležijo v isti ravnini**), če obstajajo taka števila (skalarji) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ da velja
$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0.$$
- Če so $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ in $\vec{a}_3$ vektorji iz prostora $\mathbb{R}^3$ in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ skalarji, je vektor
$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3$$
linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ in $\vec{a}_3$.

Primer

- Vektor $3 \cdot (1,1,1) - 2 \cdot (1,0,2) = (1,3,-1)$ je linearna kombinacija vektorjev $(1,1,1)$ in $(1,0,2)$.
- Vektor $(3,-2,4) = 3 \cdot (1,0,0) - 2 \cdot (0,1,0) + 4(0,0,1)$ je linearna kombinacija vektorjev $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ in $\vec{k} = (0,0,1)$.

Nelinearni in nekomplanarni vektorji

- Če sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ **nekolinearna vektorja**, lahko vsak vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$ zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- Če so $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ **nekomplanarni vektorji**, lahko vsak vektor $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$ zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

Skalarni produkt

- Za vektorja $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ bomo število (skalar) $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ zapisali na kratko kot 'produkt vektorjev'

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

  in ga imenovali **skalarni produkt** vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- Izkaže se, da če z φ označimo kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, velja enakost

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

- Skalarni produkt veliko pove o vektorjih. Namreč, za pravokotna si vektorja je njun skalarni produkt enak nič.

Lastnosti skalarnega produkta

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- $\vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b}$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$ in $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ le za $\vec{a} = \vec{0}$.
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$ ali $\vec{a} = 0$ ali $\vec{b} = 0$

Primer

Izračunajmo skalarni produkt vektorjev $\vec{a} = (2, -1, 3)$ in $\vec{b} = (1, 5, 1)$.

Dobimo $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 0$. Sklepamo lahko, da sta si vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna.

Kot med vektorjema

S pomočjo skalarnega produkta lahko določimo **kot** φ med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Kot φ je določen s formulo

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Kot med vektorjema - primer

- Določimo kot med robom in telesno diagonalo kocke.

  V kocki z robom 1, ki jo postavimo v običajni koordinatni sistem, je rob določen z vektorjem $\vec{a} = (1, 0, 0)$, telesna diagonala pa z vektorjem $\vec{d} = (1, 1, 1)$. Kot med vektorjema izračunamo po formuli

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{d}|} = \frac{(1,0,0)\cdot(1,1,1)}{|(1,0,0)|\cdot|(1,1,1)|} = \frac{1}{1\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} = 0.9553^{rd} = 54.74^{o}$$

Vektorski produkt

Za vektorja $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ bomo vektor $(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ zapisali

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

in ga imenovali **vektorski produkt** vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

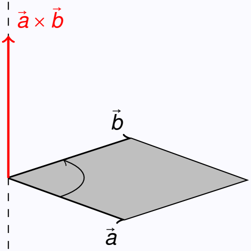
Formulo si zapomnimo po 'geometrijski shemi'

$$\begin{array}{cccccc}
(a_1, & a_2, & a_3) & \color{gray}{(a_1,} & \color{gray}{a_2,} & \color{gray}{a_3)} \\
 & & & & & \\
(b_1, & b_2, & b_3) & \color{gray}{(b_1,} & \color{gray}{b_2,} & \color{gray}{b_3)}
\end{array}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\color{blue}{a_2b_3}\color{red}{-a_3b_2}, \color{blue}{a_3b_1}\color{red}{-a_1b_3}, \color{blue}{a_1b_2}\color{red}{-a_2b_1})$$

Lastnosti vektorskega produkta

- Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na oba vektorja, $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- Smer je določena s 'pravilom desnega vijaka'.



- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times b + \vec{a} \times \vec{c}$
- $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha\vec{b})$
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, kjer je φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ je ploščina paralelograma določenega z $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- Za neničelna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ velja, da $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ natanko takrat, kadar sta vektorja kolinearna (kot φ med vektorjema je enak 0).

Naloge za vajo

- Izračunajmo vektorske produkte

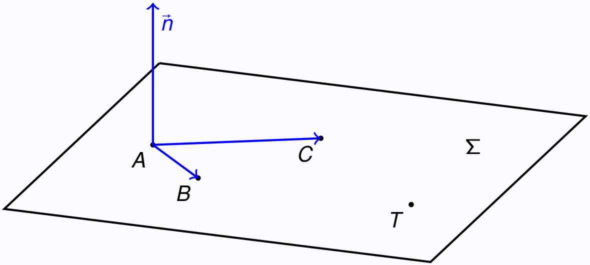
$$\vec{i} \times \vec{j} = \qquad \text{in} \qquad \vec{j} \times \vec{i} =$$
$$\vec{j} \times \vec{k} = \qquad \text{in} \qquad \vec{k} \times \vec{j} =$$
$$\vec{k} \times \vec{i} = \qquad \text{in} \qquad \vec{i} \times \vec{k} =$$

- Izračunajmo ploščino paralelograma, določenega z vektorjema $\vec{a} = (2, 1, -3)$ in $\vec{b} = (-2, 0, 4)$
- Izračunajmo ploščino trikotnika z oglišči $A\,(1, -1, 0)$, $B\,(2, 1, -1)$ in $C\,(-1, 1, 2)$.

Ravnina v prostoru

- Ravnina je določena s tremi točkami A, B in C ali
- Ravnina je določena s točko A in normalo $\vec{n}$ (vektorjem, ki je pravokoten na ravnino).

Če je ravnina Σ določena s točkami A, B, C, je normala ravnine $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.



Za poljubno točko $T(x, y, z) \in \Sigma$ velja $\overrightarrow{AT} \cdot \vec{n} = 0$. Če je normala $\vec{n} = (a, b, c)$ in točka $A = (a_1, a_2, a_3)$ dobimo enačbo ravnine Σ:

$$ax + by + cz = d$$

pri čemer je $d = aa_1 + ba_2 + ca_3$.

Primer

Določimo enačbo ravnine, ki gre skozi točke $A(1,0,1)$, $B(3,2,1)$ in $C(-2,3,2)$.

- Izračunamo $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2,2,0) \times (-3,3,1) = (2,-2,12)$.
- Če je $T = (x,y,z)$ poljubna točka na ravnini je $\vec{AT} = (x-1, y, z-1)$ vektor, ki je pravokoten na normalo $\vec{n}$.
- Torej $\vec{AT} \cdot \vec{n} = 0$. Dobimo

$$(x-1, y, z-1) \cdot (2,-2,12) = 0$$

  in enačbo ravnine

$$2x - 2y + 12z = 14$$

$$x - y + 6z = 7$$

Premica v prostoru

Premica je določena s točko in smerjo. Za premico, ki gre skozi točko $A(a, b, c)$ in ima smer $\vec{e} = (m, n, o)$ velja, da so vse točke $T(x, y, z)$ na premici oblike

$$\vec{r}_T = \vec{r}_A + t \cdot \vec{e}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

oziroma

$$(x, y, z) = (a, b, c) + t \cdot (m, n, o)$$

ali zapisano po komponentah

$$\begin{aligned} x &= a + t \cdot m \\ y &= b + t \cdot n \\ z &= c + t \cdot o \end{aligned}$$

Če zapišemo tri enačbe po komponentah in izenačimo vrednosti za t, dobimo enačbo premice v obliki

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{o}.$$

Primer

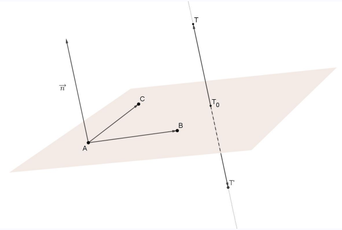
Določimo premico skozi točko $A(1,2,3)$ s smerjo $\vec{e} = (1,0,2)$.

- Zapišemo
$$(x,y,z) = (1,2,3) + t \cdot (1,0,2)$$
- Ali zapisano po komponentah
$$\begin{aligned} x &= \quad 1 + t \cdot 1 \\ y &= \quad 2 \\ z &= \quad 3 + t \cdot 2 \end{aligned}$$
- Oziroma
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{2}.$$
- Pri zadnjem zapisu velja pripomniti, da ne gre za deljenje z 0 ampak za zapis enačbe premice, ki ga je potrebno razumeti.

Naloga

Dane so točke $A(1,2,0)$, $B(-1,1,2)$ in $C(1,1,0)$ ter točka $T(1,1,1)$. Točke A, B, C določajo ravnino Ω. Poiščimo točko, ki je glede na ravnino Ω zrcalna točki T.

- Normala ravnine je $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Torej $\vec{n} = (-2,-1,2) \times (0,-1,0) = (2,0,2)$. Za normalo lahko vzamemo $\vec{n} = (1,0,1)$.
- Ravnina Ω je podana z enačbo $[(x,y,z) - (1,2,0)] \cdot (1,0,1) = 0$, torej z enačbo $x + z = 1$.



- Premica skozi točko $T(1,1,1)$ s smerjo (normale ravnine) $\vec{n} = (1,0,1)$ je podana z enačbami $x = 1 + t$, $y = 1$ in $z = 1 + t$.
- Ta premica seka ravnino Ω v točki, ki je določena z enačbami $x + z = 1$, $x = 1 + t$, $y = 1$ in $z = 1 + t$. Dobimo $(1 + t) + (1 + t) = 1$ in $t = -\frac{1}{2}$. Presečišče premice in ravnine je torej točka $T_0(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$.
- Točki T zrcalna točka bo zato $T' = T_0 - \overrightarrow{T_0T} = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) = (0,1,0)$.

Sistemi linearnih enačb

Kaj so sistemi linearnih enačb?

- Najpreprostejši sistem linearnih enačb je sistem ene enačbe z eno neznanko. Na primer $x + 1 = 2$, ki ga enostavneje zapišemo kot $x = 1$.
- Že precej bolj zapleten je sistem dveh enačb z dvema neznankama. Na primer

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}$$

  Tak sistem lahko rešimo na več načinov.
  - Tako da na primer iz prve enačbe izrazimo spremenljivko y in jo vstavimo v drugo enačbo: $y = 3 - x \longrightarrow x - (3 - x) = 1$. Rešimo enačbo za x in rešitev vstavimo v eno izmed prvotnih enačb, ter izračunamo še y:
    $x - (3 - x) = 1 \longrightarrow 2x = 4 \longrightarrow x = 2 \longrightarrow 2 + y = 3 \longrightarrow y = 1$.
  - Ali z ustreznim množenjem ene ali obeh enačb ter odštevanjem ali seštevanjem levih in desnih strani enačb:

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & 1 \\ \hline 2x & & & = & 4 \end{array}$$

    Torej $x = 2$ in iz prve enačbe $y = 1$.
- Pri še bolj zapletenih (večjih) sistemih enačb, za reševanje uporabimo drugega izmed zgornjih načinov, ki ga bomo v nadaljevanju natančneje opisali.

Zakaj govorimo o **linearnih** sistemih enačb?

Da je sistem 'linearen' pomeni, da vse spremenljivke nastopajo 'linearno', to je v 'prvi potenci'. Na primer

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y^2 & = & 3 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}$$

ni linearen sistem enačb, ker v prvi enačbi nastopa y^2.

Nelinearne sisteme enačb je težje obravnavati.

Sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami

Sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & -3 \end{array}$$

bomo zapisali krajše (rečemo, da ga napišemo z matriko)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

Gaussov postopek reševanja linearnega sistema enačb - Gaussova eliminacija

Pravimo, da sta dva sistema enačb **ekvivalentna**, če imata enake rešitve. Sistem rešujemo tako, da ga zamenjujemo z ekvivalentnimi sistemi, dokler ne dobimo sistema, ki ga je zelo enostavno rešiti, oziroma je že rešen.

Ekvivalentni sistemi

Ekvivalentni sistem linearnih enačb dobimo tako, da

- Med seboj lahko zamenjamo dve enačbi.
- Posamezni enačbi lahko prištejemo večkratnik druge enačbe.
- Enačbo lahko pomnožimo s številom $a \neq 0$.

V zapisu z matriko to pomeni:

- Med seboj lahko zamenjamo dve vrstici.
- Posamezni vrstici lahko prištejemo večkratnik druge vrstice.
- Vrstico lahko pomnožimo s številom $a \neq 0$.

Postopek Gaussove eliminacije na konkretnem primeru

Sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & -3 \end{array} \quad \text{zapišemo z matriko} \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right]$$

Drugi vrstici prištejemo prvo. Tretji vrstici odštejemo dvakratnik prve vrstice. Drugo vrstico delimo z 2 in prištejemo tretji.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Tretjo vrstico delimo z -2 in odštejemo od prve in druge vrstice. Drugo vrstico odštejemo od prve.

In le še preberemo rešitve $x = 1$, $y = -2$ in $z = 3$.

Vaja 1

Rešimo sistem:

$$\begin{aligned} -x \ +y+2z &= 3 \\ x-2y-3z &= 0 \\ 2y \ +z &= -8 \end{aligned}$$

Dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Torej $x = -4$, $y = -5$ in $z = 2$.

Izračun sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Vaja 2

Rešimo sistem:

$$\begin{array}{rrrrl} x & +2y & +5z & +u & = 4 \\ 3x & -4y & +3z & -2u & = 7 \\ 4x & +3y & +2z & -u & = 1 \\ x & -2y & -4z & -u & = 2 \end{array}$$

Dobimo

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 3 & -2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Torej $x = 3$, $y = -2$, $z = 0$ in $u = 5$.

Izračun sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 3 & -2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 10 & 12 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 18 & 5 & 15 \\ 0 & 4 & 9 & 2 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 3 & 13 \\ 0 & 10 & 12 & 5 & 15 \\ 0 & 10 & 36 & 10 & 30 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 24 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 54 & 20 & 100 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 24 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 30 & 15 & 75 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 24 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 50 \end{array}\right] \longrightarrow$$

Izračun sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & 175 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Vaja 3

Rešimo sistem:

$$\begin{aligned} x &+2y &+2z &= 3 \\ &2y &+2z &= 2 \\ 2x &+y &+z &= 4 \end{aligned}$$

Dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Zadnja vrstica pomeni $0 = 1$. To ni mogoče. Zaključimo: **Sistem ni rešljiv!** ali **sistem nima nobene rešitve!**

Izračun sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Nerešljivi linearni sistemi

Torej obstajajo tudi sistemi, ki niso rešljivi. Rečemo tudi, da je tak sistem protisloven. Enostaven primer takega sistema je

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ x+y &= 2 \end{aligned}$$

Vaja 4

Rešimo sistem:

$$\begin{aligned} x \ &+y &+z &+u &= 3\\ x \ &-y &+z &+u &= -1\\ x \ &+y &+3z &+3u &= 3\\ x \ &+9y &+z &+u &= 19 \end{aligned}$$

Dobimo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3\\ 1 & 9 & 1 & 1 & 19 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Torej $x = 1$, $y = 2$, $z = -u$. Dobimo neskončno rešitev. Za vsako število t je četvorka $(1, 2, t, -t)$ rešitev sistema naših enačb.

Izračun sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3\\ 1 & 9 & 1 & 1 & 19 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 8 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vaja 5

Podobno bi za sistem:

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ 3x - y + 3z - u &= 2 \\ x + y + z + u &= 2 \\ x + y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

dobili neskončno rešitev. Vsaka četvorka oblike $(t, 1+t, 1-t, -t)$, kjer lahko za t izberemo poljubno število, je rešitev tega sistema enačb.

Izračun sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Linearni sistemi z več rešitvami

Torej obstajajo tudi sistemi, ki imajo več rešitev. Enostaven primer takega sistema je

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ x+y &= 1 \end{aligned}$$

Ker sta obe enačbi ekvivalentni imamo eno samo bistveno enačbo $x + y = 1$. Rešitev tega sistema (enačbe) je neskončno mnogo. Sistem reši vsak par števil $(t, 1 - t)$, kjer je t poljubno število.

Kaj lahko povemo o rešitvah sistema linearnih enačb?

Pri rešitvah sistema linearnih enačb torej lahko nastopijo tri različne možnosti:

- Sistem ima enolično (točno določeno) rešitev.
- Sistem nima rešitev.
- Sistem ima neskončno rešitev.

Primer uporabe linearnega sistema enačb

Na razpolago imamo spojine L_1, L_2, L_3, L_4, ki so sestavljene iz čistih snovi M_1, M_2, M_3, M_4 in za katere velja:

$$\begin{aligned} L_1 &\text{ je kar čista snov } M_1 \\ L_2 &\text{ je mešanica 50\% snovi } M_1 \text{ in 50\% snovi } M_2 \\ L_3 &\text{ je mešanica 50\% snovi } M_2 \text{ in 50\% snovi } M_3 \\ L_4 &\text{ je mešanica 50\% snovi } M_3 \text{ in 50\% snovi } M_4. \end{aligned}$$

- Kako bi zmešali spojino, ki bo vsebovala vse štiri čiste snovi v enakih koncentracijah ?

Če zmešamo

$$\begin{aligned} x &\text{ litrov spojine } L_1 \\ y &\text{ litrov spojine } L_2 \\ z &\text{ litrov spojine } L_3 \\ u &\text{ litrov spojine } L_4 \end{aligned}$$

dobimo mešanico

$$x \cdot M_1 + y \cdot (\frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2) + z \cdot (\frac{1}{2}M_2 + \frac{1}{2}M_3) + u \cdot (\frac{1}{2}M_3 + \frac{1}{2}M_4).$$

Primer uporabe - nadaljevanje

Mešanica

$$x \cdot M_1 + y \cdot (\frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2) + z \cdot (\frac{1}{2}M_2 + \frac{1}{2}M_3) + u \cdot (\frac{1}{2}M_3 + \frac{1}{2}M_4)$$

vsebuje

$$\begin{array}{rcccrcc} x + \frac{1}{2}y & \text{litrov spojine} & M_1, & & \frac{y+z}{2} & \text{litrov spojine} & M_2, \\ \frac{z+u}{2} & \text{litrov spojine} & M_3 & \text{in} & \frac{u}{2} & \text{litrov spojine} & M_4. \end{array}$$

Če naj bodo te količine enake (enake npr. 1), dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} x + \tfrac{1}{2}y &= 1 \\ \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z &= 1 \\ \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}u &= 1 \\ \tfrac{1}{2}u &= 1 \end{aligned} \qquad \text{zapisano z matriko} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Primer uporabe - nadaljevanje

Rešimo sistem:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Rešitve so torej $x = 0, y = 2, z = 0, u = 2$. Zmešamo torej 2 (litra) spojine L_2 in 2 (litra) spojine L_4. Preverimo, kakšno spojino dobimo:

$$\begin{aligned} 2 \cdot L_2 + 2 \cdot L_4 \quad &= 2 \cdot (\tfrac{1}{2} M_1 + \tfrac{1}{2} M_2) + 2 \cdot (\tfrac{1}{2} M_3 + \tfrac{1}{2} M_4) = \\ &= M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \end{aligned}$$

Dobili smo torej 4 litre spojine v kateri je po en liter vsake izmed čistih spojin M_1, M_2, M_3, M_4.

Podoben primer uporabe linearnega sistema enačb (drugačni podatki)

Na razpolago imamo spojine L_1, L_2, L_3, L_4, ki so sestavljene iz čistih snovi M_1, M_2, M_3, M_4 in za katere velja:

$$L_1 \text{ je mešanica } \frac{2}{3} \text{ snovi } M_1 \text{ in } \frac{1}{3} \text{ snovi } M_4$$

$$L_2 \text{ je mešanica } \frac{1}{3} \text{ snovi } M_1 \text{ in } \frac{2}{3} \text{ snovi } M_2$$

$$L_3 \text{ je mešanica } \frac{3}{5} \text{ snovi } M_2 \text{ in } \frac{2}{5} \text{ snovi } M_3$$

$$L_4 \text{ je mešanica } \frac{1}{10} \text{ snovi } M_1, \frac{2}{5} \text{ snovi } M_3 \text{ in } \frac{1}{2} \text{ snovi } M_4.$$

- Ali je mogoče z mešanjem spojin L_1, L_2, L_3, L_4, dobiti spojino, ki bo vsebovala vse štiri čiste snovi v enakih koncentracijah ?

Če zmešamo x litrov spojine L_1, y litrov spojine L_2, z litrov spojine L_3, u litrov spojine L_4 dobimo mešanico

$$x \cdot (\frac{2}{3}M_1 + \frac{1}{3}M_4) + y \cdot (\frac{1}{3}M_1 + \frac{2}{3}M_2) + z \cdot (\frac{3}{5}M_2 + \frac{2}{5}M_3) + u \cdot (\frac{1}{10}M_1 + \frac{2}{5}M_3 + \frac{1}{2}M_4).$$

Mešanica

$$x \cdot (\frac{2}{3}M_1 + \frac{1}{3}M_4) + y \cdot (\frac{1}{3}M_1 + \frac{2}{3}M_2) + z \cdot (\frac{3}{5}M_2 + \frac{2}{5}M_3) + u \cdot (\frac{1}{10}M_1 + \frac{2}{5}M_3 + \frac{1}{2}M_4)$$

vsebuje

$$\begin{array}{rlllrll} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{10}u & \text{litrov spojine} & M_1, & & \frac{2}{3}y + \frac{3}{5}z & \text{litrov spojine} & M_2, \\ \frac{2}{5}z + \frac{2}{5}u & \text{litrov spojine} & M_3 & \text{in} & \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}u & \text{litrov spojine} & M_4. \end{array}$$

Če naj bodo te količine enake (enake npr. 1), dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{10}u &= 1 \\ \frac{2}{3}y + \frac{3}{5}z &= 1 \\ \frac{2}{5}z + \frac{2}{5}u &= 1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}u &= 1 \end{aligned}$$

zapisano z matriko

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{10} & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Rešimo (računsko nekoliko zahtevnejši) sistem: (Lahko si pomagamo z računalnikom: https://ko.fmf.uni-lj.si/po/ZF/redirect.html)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{10} & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} \end{array}\right]$$

Rešitve so torej $x = \frac{9}{8}, y = \frac{3}{8}, z = \frac{5}{4}, u = \frac{5}{4}$. Zmešamo torej $\frac{9}{8}$ (litra) spojine L_1, $\frac{3}{8}$ (litra) spojine L_2, $\frac{5}{4}$ (litra) spojine L_3 in $\frac{5}{4}$ (litra) spojine L_4. Seveda lahko zmešamo tudi 9 (litrov) spojine L_1, 3 (litre) spojine L_2, 10 (litrov) spojine L_3 in 10 (litrov) spojine L_4. V tem primeru dobimo spojino, ki bo vsebovala po 8 litrov vsake izmed čistih snovi M_1, M_2, M_3 in M_4.

Razumevanje in povezovanje vsebin

Poglavja in vsebine, ki smo jih obravnavali so zelo povezana.

- Linearni sistem

$$x + y = 1$$
$$x - y = 1$$

  bi rešili

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

  in dobili rešitev $x = 1$ in $y = 0$.

- Isto rešitev bi dobili, če enačbi $x + y = 1$ in $x - y = 1$ razumemo kot premici $y = -x + 1$ in $y = x - 1$. Rešitev je presečišče premic, to je točka $(1, 0)$.

Razumevanje in povezovanje vsebin 2

- Podobno bi dobili rešitev linearnega sistema

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & -z & = 1 \\ x & -y & +z & = 1 \\ x & +3y & -3z & = 1 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Torej dobimo neskončno rešitev, oziroma $x = 1$ in $y = z$. Poljubna rešitev sistema je torej oblike $(x, y, z) = (1, t, t)$, kjer je t poljubno število.

- Po drugi strani, če enačbo $x + y - z = 1$ razumemo kot ravnino skozi točko $(1, 0, 0)$ z normalo $\vec{n} = (1, 1, -1)$ in enačbo $x - y + z = 1$ kot ravnino skozi točko $(1, 0, 0)$ z normalo $\vec{n} = (1, -1, 1)$, bo presečišče teh dveh ravnin premica skozi točko $(1, 0, 0)$ s smerjo

$$\vec{s} = (1, 1, -1) \times (1, -1, 1) = (0, -2, -2).$$

  Torej premica skozi točko $(1, 0, 0)$ s smerjo $\vec{s} = (0, 1, 1)$. To pa je ravno množica vseh točk $(x, y, z) = (1, t, t)$. Isto premico bi dobili tudi če bi izračunali presečišče ravnin določenih s prvo in zadnjo enačbo ali z drugo in zadnjo enačbo.

Razumevanje in povezovanje vsebin 3

- Če pa bi reševali sistem

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & -z & = 1 \\ x & -y & +z & = 1 \\ x & +y & +z & = 3 \end{array} \qquad \longrightarrow \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

  bi dobili rešitev $x = 1$, $y = 1$ in $z = 1$.
- Po prejšnjem razmisleku vemo, da preseku prvih dveh enačb (ravnin) ustreza premica $(x, y, z) = (1, t, t)$. Presek te premice z zadnjo enačbo (ravnino) $x + y + z = 3$ pa izračunamo iz enačbe $1 + t + t = 3$ in dobimo $t = 1$ ter presečišče $(1, 1, 1)$, kar ustreza prej dobljeni rešitvi.

Uporabnost linearnih sistemov enačb

Linearni sistemi enačb in njihovo reševanje je zelo uporabno področje matematike. Računsko reševanje takih sistemov je sicer rutinsko in v današnjem času opravljeno z računalniki. (Na primer: https://ko.fmf.uni-lj.si/po/ZF/redirect.html). Je pa za uspešno uporabo računalnikov nujno razumevanje linearnih sistemov enačb in njihovega reševanja.

Kaj so matrike?

Matrike so (pravokotne) tabele števil.

Matrika velikosti 2×3 je pravokotna tabela $2 \cdot 3 = 6$ števil, razporejenih v 2 vrstici in 3 stolpce. Na primer

$$A = A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrika velikosti $m \times n$ je pravokotna tabela $m \cdot n$ števil, razporejenih v m vrstic in n stolpcev

$$A = A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrika z enim stolpcem je **stolpčni vektor**, matrika z eno samo vrstico je **vrstični vektor**. Rečemo tudi samo **stolpec** oziroma **vrstica**.

Računanje z matrikami

Množenje matrike s številom (skalarjem): Vsak element matrike pomnožimo s številom (skalarjem) (podobno kot pri vektorjih).

Seštevanje matrik: Seštevamo lahko le matrike **enakih** velikosti (podobno kot seštevanje vektorjev). Seštevamo 'istoležna števila'.

Primer

Če je mogoče, za matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \text{ in } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

izračunajmo
$A+B$, $A+C$, $-B$, $B+(-B)$, $2\cdot B$, $3\cdot A+2\cdot B$, $3\cdot A+2\cdot B-4\cdot C$.

Množenje matrik

- Matriki $A_{m\times n}$ in $B_{p\times q}$ lahko zmnožimo, če je $n = p$.
- $A_{m\times n} \cdot B_{n\times q} = C_{m\times q}$. Pri tem je c_{ij} je 'skalarni produkt' i-te vrstice A in j-tega stolpca B:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ -9 & -7 & 3 \\ 9 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Primeri

Če je mogoče zmnožimo:

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Izračunajmo:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Izračunajmo:

- $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -7 & 3\\4 & -5 & 2\\-3 & 2 & 0\end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix}1 & -7 & 3\\4 & -5 & 2\\-3 & 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 3 & 4\\3 & 3 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}9 & -1 & -2\\-2 & 1 & 0\\-3 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix}9 & -1 & -2\\-2 & 1 & 0\\-3 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 3 & 4\\3 & 3 & 7\end{bmatrix}$$

Lastnosti matričnega množenja

- **Ne** velja nujno $A \cdot B = B \cdot A$ (primer 1. zgoraj).
- Iz $A \cdot B = 0$ **ne sledi** $A \neq 0$ ali $B \neq 0$ (primer 2. zgoraj).
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ in $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- **Enotska matrika** ali **identiteta**: Kvadratna matrika I_m velikosti $m \times m$, ki ima enice po diagonali, sicer pa same ničle.
  Za vsako matriko $A_{m \times n}$ velja $A_{m \times n} \cdot I_n = A_{m \times n}$ in $I_m \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n}$ (primera 3. in 4. zgoraj).
- Za nekatere matrike A obstaja **inverzna matrika** A^{-1}, za katero velja $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ (primer 5. zgoraj).

Sistem enačb

$$\begin{aligned} x + \quad y + \quad 2z &= \quad 1 \\ 2x + \quad 3y + \quad 4z &= \quad 0 \\ 3x + \quad 3y + \quad 7z &= \quad 1 \end{aligned}$$

smo po sistemu Gaussove eliminacije rešili

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \quad \text{in dobili rešitev oblike} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

V primeru enolično rešljivega sistema enačb za osnovno matriko sistema vedno obstaja inverzna matrika.
V našem primeru je matrika sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

in v primeru 5. zgoraj smo videli, da je njena inverzna matrika enaka

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrike in (nerešljivi) sistemi enačb

Sistem enačb

$$\begin{array}{rrrl} x & +2y & +2z & = 3 \\ & 2y & +2z & = 2 \\ 2x & +y & +z & = 4 \end{array}$$

smo po sistemu Gaussove eliminacije rešili

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

in dobili, da sistem nima rešitev. To pomeni, da matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{nima inverza.}$$

Sistem enačb

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ 3x - y + 3z - u &= 2 \\ x + y + z + u &= 2 \\ x + y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

smo po sistemu Gaussove eliminacije rešili

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \dots \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

in dobili neskončno rešitev v obliki četvorke $(t, 1 + t, 1 - t, -t)$. Ker sistem ni enolično rešljiv, to pomeni, da matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ nima inverza.}$$

Matrike in (enolično rešljivi) sistemi enačb - ponovno

Ponovimo: Osnovna matrika sistema enačb z enolično rešitvijo ima inverz.

Inverz matrike in Gaussova eliminacija

Če obstaja inverz matrike, ga lahko izračunamo z Gaussovo eliminacijo. Na primer

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \dots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Z Gaussovo eliminacijo smo dobili inverzno matriko. Matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sta si namreč inverzni, oziroma

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistem enačb

$$\begin{aligned} x + \quad y + \quad 2z &= 1 \\ 2x + \quad 3y + \quad 4z &= 0 \\ 3x + \quad 3y + \quad 7z &= 1 \end{aligned}$$

smo po sistemu Gaussove eliminacije rešili

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \text{ in dobili rešitev oblike } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Sistem enačb

$$\begin{aligned} x + \quad y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \\ 3x + 3y + 7z &= 1 \end{aligned} \quad \text{lahko zapišemo kot enačbo matrik} \quad A \cdot X = B$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Podobno kot pri številih dobimo

$$A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Sistem enačb

$$\begin{array}{rcl} x + y + 2z &=& 1 \\ 2x + 3y + 4z &=& 0 \\ 3x + 3y + 7z &=& 1 \end{array}$$

ob upoštevanju, da je inverz matrike sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{enak} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

torej preprosto izračunamo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vaja

Sistem enačb

$$\begin{aligned} &+y &+z &-u &= 1\\ x &-3y &-2z &+3u &= 0\\ x &-y &-z &+u &= 1\\ -x &+3y &+2z &-2u &= 2 \end{aligned} \quad \text{zapišemo z matrikami} \quad A \cdot X = B,$$

pri čemer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ je } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunali smo torej rešitev $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$ in $u = 2$.

Vaja (naloga, ki smo jo obravnavali pri sistemih enačb) - rešitev z matrikami

Na razpolago imamo spojine L_1, L_2, L_3, L_4, ki so sestavljene iz čistih snovi M_1, M_2, M_3, M_4 in za katere velja:

$$L_1 \text{ je mešanica } \frac{2}{3} \text{ snovi } M_1 \text{ in } \frac{1}{3} \text{ snovi } M_4$$

$$L_2 \text{ je mešanica } \frac{1}{3} \text{ snovi } M_1 \text{ in } \frac{2}{3} \text{ snovi } M_2$$

$$L_3 \text{ je mešanica } \frac{3}{5} \text{ snovi } M_2 \text{ in } \frac{2}{5} \text{ snovi } M_3$$

$$L_4 \text{ je mešanica } \frac{1}{10} \text{ snovi } M_1, \frac{2}{5} \text{ snovi } M_3 \text{ in } \frac{1}{2} \text{ snovi } M_4.$$

- Kako bi z mešanjem spojin L_1, L_2, L_3, L_4, dobiti spojino, ki bo vsebovala vse štiri čiste snovi v enakih koncentracijah ?

Če zmešamo x litrov spojine L_1, y litrov spojine L_2, z litrov spojine L_3, u litrov spojine L_4 dobimo mešanico

$$x \cdot (\frac{2}{3}M_1 + \frac{1}{3}M_4) + y \cdot (\frac{1}{3}M_1 + \frac{2}{3}M_2) + z \cdot (\frac{3}{5}M_2 + \frac{2}{5}M_3) + u \cdot (\frac{1}{10}M_1 + \frac{2}{5}M_3 + \frac{1}{2}M_4).$$

Mešanica

$$x\cdot\left(\frac{2}{3}M_1+\frac{1}{3}M_4\right)+y\cdot\left(\frac{1}{3}M_1+\frac{2}{3}M_2\right)+z\cdot\left(\frac{3}{5}M_2+\frac{2}{5}M_3\right)+u\cdot\left(\frac{1}{10}M_1+\frac{2}{5}M_3+\frac{1}{2}M_4\right)$$

torej vsebuje

$$\begin{array}{rlllrll}
\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{10}u & \text{litrov spojine} & M_1, & & \frac{2}{3}y+\frac{3}{5}z & \text{litrov spojine} & M_2,\\
\frac{2}{5}z+\frac{2}{5}u & \text{litrov spojine} & M_3 & \text{in} & \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}u & \text{litrov spojine} & M_4.
\end{array}$$

Če naj bodo te količine enake (enake npr. 1), dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned}
\tfrac{2}{3}x+\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{10}u &= 1\\
\tfrac{2}{3}y+\tfrac{3}{5}z &= 1\\
\tfrac{2}{5}z+\tfrac{2}{5}u &= 1\\
\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{2}u &= 1
\end{aligned}
\quad\Leftrightarrow\quad
\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{10}\\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\\ u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

Izračun inverzne matrike opravimo z računalnikom.

Razmislimo še, kaj bi glede na zgornjo nalogo pomenil izračun

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$