Izpit iz Matematičnega modeliranja

7. 7. 2017

1. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poiščite Moore–Penroseov inverz A^+ matrike A.

   (b) Ali je sistem $Ax = b$ rešljiv? Zakaj?

   (c) Če je sistem rešljiv, poiščite tisto rešitev x, ki je najmanj oddaljena od koordinatnega izhodišča, če sistem ni rešljiv, pa poiščite tistio vektor x^+, za katerega je napaka $\|Ax^+ - b\|$ najmanša.

   (d) Poiščite še Moore–Penroseov inverz $(A^+)^+$ matrike A^+.

2. Na jedilniku v študentski menzi so tri jedi: pizza, špageti in solata. Obiskovalec vsak naslednji dan izbere svojo jed glede na izkušnje prejšnjega dne.

   - Če je danes jedel solato, bo jutri izbral pizzo ali špagete, z enako verjetnostjo.
   - Če je danes jedel pizzo ali špagete, bo jutri z verjetnostjo $1/2$ jedel isto jed kot danes.
   - Če je danes izbral pizzo ali špagete in se bo jutri odločil za spremembo, bo z enako verjetnostjo izbral vsako od preostalih dveh jedi.

   (a) Zapišite prehodno matriko P markovske verige, ki opisuje jedilnik obiskovalca menze.

   (b) Če je obiskovalec danes jedel solato, s kakšno verjetnstjo bo izbral solato tudi pojutrišnjem? In čez tri dni?

   (c) Dve izmed lastnih vrednosti matrike P sta $1/4$ in $-1/4$. Kaj lahko poveste o preostalih lastnih vrednostih?

   (d) S kakšno verjetnostjo bo na zadnji dan v mesecu obiskovaec izbral solato? Privzamete lahko, da je stanje na zadnji dan že limitno stanje markovske verige.

Obrnite list!

3. Krivulja K ima parametrizacijo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$.

   (a) Poišči točkete, v katerih K seka koordinatni osi x in y.

   (b) Poiščite enačbo tangente na K pri $t = 1$.

   (c) Poiščite točke na K, v katerih je tangenta vzporedna eni od koordinatnih osi.

   (d) Ali obstaja točka, v kateri K seka samo sebe? Če da, izračunajte ploščino zanke, ki jo krivulje opiše.

   (e) Skicirajte krivuljo K.

4. Za sistem diferencialnih enačb

$$\dot{x} = xy + 1, \quad \dot{y} = x + xy$$

   (a) poiščite stacionarne točke in določite njihov tip (sedlo, izvir, ponor ali center),

   (b) zapišite linearizacijo sistema okrog ene od stacionarnih točk,

   (c) poiščite rešitev lineariziranega sistema

   (d) skicirajte fazno sliko sistema v okolici izbrane stacionarne točke.