Izpit iz Matematičnega modeliranja

19. junij 2013

1. Določite Moore-Penroseov inverz matrike $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   Rešitve: Če je matrika $A^\mathsf{T} A$ obrnljiva, potem lahko Moore-Penroseov inverz matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ izračunamo najlažje kot $A^+ = (A^\mathsf{T} A)^{-1} A^\mathsf{T}$. Ker je $A^\mathsf{T} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, je $(A^\mathsf{T} A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ in zato

   $$A^+ = (A^\mathsf{T} A)^{-1} A^\mathsf{T} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Druga pot je nekoliko daljša. Najprej izračunamo lastne vrednosti matrike $A^\mathsf{T} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, ki sta 3 in 1, s pripadajočima normiranima lastnima vektorjema $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ter $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Tako dobimo v razcepu singularnih vrednosti

   $$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textit{ter} \qquad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}.$$

   Sledi

   $$A^+ = V \Sigma^+ U^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Na Lokvanjskih Otokih živi živahna žaba Živa, ki si dopoldneve krajša s skakanjem po treh lokvanjih s preprostim pravilom, da nikoli ne sme poskočiti na istem lokvanju. Prvi lokvanj je zelene, drugi rjave in tretji rumene barve. Verjetnost, da Živa skoči z zelenega lokvanja na rumenega, je enaka $\frac{1}{2}$, prav tako verjetnost, da skoči z zelenega na rjavega, z rjavega na zelenega ali rjavega na rumenega. Verjetnost, da skoči iz rumenega na zelenega, pa je enaka 1.

   (a) Pokažite, da obstaja limitno stanje markovske verige, določeno s skakanjem žabe Žive. S kolikšnimi verjetnostmi se po zelo (zelo, zelo) veliko skokih Živa nahaja na posameznih lokvanjih?

   (b) Denimo, da ponoči dež preluknja rumeni lokvanj in da mora naslednje jutro Živa ob skoku na rumeni lokvanj končati igro. Če začne na zelenem lokvanju, koliko je pričakovano število skokov, ki jih naredi Živa preden konča igro?

Rešitev:

(a) *Prehodna matrika markovske verige žabe Žive je za stanja s_{Ze}, s_{Rj} in s_{Ru}, enaka*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker je markovska veriga nerazcepna, obstaja limitno stanje natanko tedaj, ko je 1 edina lastna vrednost matrike P, ki je po absolutni vrednosti enaka 1. Karakteristični polinom matrike P je enak $-\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{4}$, katerega ničle so enake $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, zato je 1 res edina lastna vrednost, ki je po absolutni vrednosti enaka 1.

Limitno stanje markovske verige je določeno z lastnim vektorjem matrike P^T, ki pripada lastni vrednosti 1, in ki ima vsoto komponent enako 1. Ta je enak $\begin{bmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, torej se bo Živa z verjetnostjo $\frac{4}{9}$ nahajala na zelenem lohvanju, z verjetnostjo $\frac{2}{9}$ na rjavem in z verjetnostjo $\frac{1}{3}$ na rumenem lokvanju.

(b) *Če je rumeni lokvanj preluknjan, potem je stanje s_{Ru} absorbirajoče in pripadajoča prehodna matrika nove markovske verige je enaka $P' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, kjer je $Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ in $R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Število pričakovanih skokov, ki jih naredi Živa preden pristane v luknji v rumenem lokvanju, je enak prvi komponenti vektorja*

$$(I - Q)^{-1}e = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

torej $\frac{2}{3}$.

3. Oglejmo si vijačnico $\vec{r}(t) = (3\cos(2t), 2t, 3\sin(2t))$.

   (a) Zapišite tangento na vijačnico v točki $(3, 0, 0)$.

   (b) Ali je v kakšni točki na vijačnici tangenta v tej točki vzporedna vektorju $(0, 1, 0)^\mathsf{T}$? Kaj pa vektorju $(0, 1, -3)^\mathsf{T}$?

   (c) Izračunajte dolžino loka vijačnice od točke $(3, 0, 0)$ do $(3, 2\pi, 0)$.

Rešitev:

(a) *V točki $(3, 0, 0)$ se spirala "nahaja" pri parametru $t = 0$.*

V poljubni točki je $\dot{\vec{r}}(t) = (-6\sin(2t), 2, 6\cos(2t))$ in zato je smerni vektor na spiralo v točki $(3, 0, 0)$ enak $\dot{\vec{r}}(0) = (0, 2, 6)$, torej je tangenta parametrično podana kot

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(b) Spomnimo se, da je v poljubni točki $\dot{\vec{r}}(t) = (-6\sin(2t), 2, 6\cos(2t))$. *Ker* $\sin(2t)$ *ter* $\cos(2t)$ *nikoli ne moreta biti oba hkrati enaka 0, tangenta v nobeni točki ne more biti vzporedna vektorju* $(0,1,0)^{\mathsf{T}}$.

Pač pa je $(-6\sin(2t), 2, 6\cos(2t)) = \alpha(0,1,-3)$, *ko je* $\alpha = 2$ *in zato* $\sin(2t) = 0$ *ter* $\cos(2t) = -1$. *To se lahko zgodi v pri vseh* $t = \pi + 2k\pi$, *kjer* $k \in \mathbb{Z}$, *torej takšne točke obstajajo.*

(c) V točki $(3,0,0)$ *se spirala "nahaja" pri parametru* $t = 0$, *v točki* $(3, 2\pi, 0)$ *pa pri* $t = \pi$. *Izračunajmo najprej*

$$||\dot{\vec{r}}(t)||^2 = 36\sin^2(2t) + 4 + 36\cos^2(2t) = 40,$$

torej je dolžina loka od točke $(3,0,0)$ *do* $(3,2\pi,0)$ *enaka*

$$\begin{aligned}\int_0^\pi ||\dot{\vec{r}}(t)||dt &= \int_0^\pi \sqrt{40}\, dt = \\ &= \sqrt{40}\,\pi.\end{aligned}$$

4. Iščemo rešitev začetnega problema

$$x'' + 5x' + 4x = 0; \quad x(0) = 3 \quad \text{in} \quad x'(0) = -5.$$

(a) Poiščite točno rešitev tega začetnega problema.

(b) Homogeno diferencialno enačbo $x'' + 5x' + 4x = 0$ zapišite kot sistem diferencialnih enačb prvega reda. Zapišite tudi ustrezne začetne pogoje.

(c) Izračunaj rešitev z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.2$ na intervalu $[0, 0.4]$.

(d) **Dodatek za 25 točk:** Narišite fazno sliko, lastne smeri sistema in rešitev, ki zadošča zgornjim začetnim pogojem.

Rešitev:

(a) $x(t) = \frac{2}{3}e^{-4t} + \frac{7}{3}e^{-t}$.

(b) $x'(t) = y(t)$, $y'(t) = -5y - 4x$, $x(0) = 3$, $y(0) = -5$.

(c) 1.52