Izpit iz Matematičnega modeliranja

Predrok 6. 6. 2013

1. (a) Če je A^+ Moore-Penroseov inverz matrike A, kakšen je Moore-Penroseov inverz matrike A^T? Dokažite!

   (b) Določite Moore-Penroseov inverz matrike

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev:

(a) Moore-Penroseov inverz matrike A^T je enak $(A^+)^\mathsf{T}$, lahko se denimo prepričate po definiciji (preverite štiri enakosti).

(b) S pomočjo (a) dela ugotovite, da je lažje izračunati inverz matrike $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$, saj je

$$AA^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

S pomočjo enega od algoritmov opisanega na predavanjih izračunamo, da je

$$(A^\mathsf{T})^+ = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

in zato

$$A^+ = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

(Seveda ni nič narobe, če ste poračunali

$$A^\mathsf{T}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

le nekaj več dela je bilo z računanjem bodisi lastnih vrednosti in lastnih vektorjev, bodisi inverza 3×3 matrike namesto 2×2.)

2. Oglejmo si spiralo $\vec{r}(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$.

   (a) Zapišite smerna vektorja na spiralo v točkah $(1,0)$ ter $(e^{-\pi}, 0)$.

   (b) Izračunajte dolžino loka krivulje od točke $(1,0)$ do $(e^{-\pi}, 0)$.

Rešitev:

(a) V točki $(1,0)$ se spirala "nahaja" pri parametru $t = 0$, v točki $(e^{-\pi}, 0)$ pa pri $t = \pi$.

V poljubni točki je $\dot{\vec{r}}(t) = (-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t, -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t) = -e^{-t}(\sin t + \cos t, \sin t - \cos t)$ in zato je smerni vektor na spiralo v točki $(1,0)$ enak $\dot{\vec{r}}(0) = (-1, 1)$, v točki $(e^{-\pi}, 0)$ pa $\dot{\vec{r}}(\pi) = (-e^{-\pi}, e^{-\pi})$.

(b) *Izračunajmo najprej*

$$\begin{aligned} ||\dot{\vec{r}}(t)||^2 &= e^{-2t}\left((\sin + \cos t)^2 + (\sin t - \cos t)^2\right) = \\ &= 2e^{-2t}, \end{aligned}$$

torej je dolžina loka med $(1,0)$ *in* $(e^{-\pi},0)$ *enaka*

$$\begin{aligned} \int_0^\pi ||\dot{\vec{r}}(t)||dt &= \int_0^\pi \sqrt{2}e^{-t}dt = \\ &= -\sqrt{2}e^{-t}\Big|_0^\pi = \\ &= \sqrt{2}(1-e^{-\pi}). \end{aligned}$$

3. Za začetni problem $y' = -y + 1$, $y(0) = 2$

- poiščite točno rešitev,
- z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.5$ izračunajte približno vrednost rešitve $y(1)$.

Primerjajte oba rezultata za $y(1)$. *Rešitev:*

- *Ločimo spremenljivki in integriramo:*

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int -dt, \quad \log(y-1) = e^{-t} + \log C, \quad y = Ce^{-t} + 1$$

Upoštevamo še začetni pogoj:

$$y(0) = C + 1 = 2, \quad \textit{torej} \quad C = 1, \quad y = e^{-t} + 1, \quad y(1) = 1 - 1/e.$$

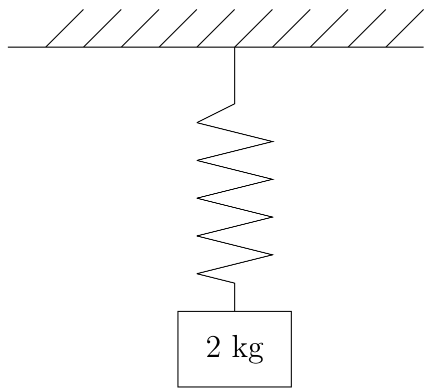
- *Iz enačbe sledi:*

$$y'(0) = -y(0) + 1 = -1, \quad y(0.5) \approx y(0) + hy'(0) = 2 + 0.5(-1) = 1.5$$

$$y'(0.5) \approx -1.5 + 1 = -0.5, \quad y(1) \approx y(0.5) + hy'(0.5) = 1.5 + 0.5(-0.5) = 1.25.$$

4. Vzmet z utežjo 2 kg in koeficientom vzmeti 128 je pritrjena na strop (glej sliko). Dolžina vzmeti v ravnonesnem položaju je 0.5 m.

- Ob času $t = 0$ vzmet raztegnemo na 0.7 m in spustimo (z začetno hitrostjo 0). Določite položaj uteži ob časih $t = \pi/2$, $t = 2\pi$ in ob poljubnem času t. Kdaj se bo utež prvič vrnila v začetni položaj?



- **Vprašanje za 25 bonus točk**: Recimo, da je vzmet potopljena v tekočino, ki duši gibanje s koeficientom dušenja $\beta = 40$. Ob času $t = 0$ utež porinemo iz ravnovesne lege z začetno hitrostjo $v_0 = 0.6\,\mathrm{m/s}$. Kakšna je rešitev v tem primeru?

Rešitev:

- *Iz Newtonovega zakona in Hookovega zakona dobimo enačbo gibanja:*

$$2\ddot{x} = -128x, \quad \textit{torej} \quad \ddot{x} + 64x = 0$$

Splošno rešitev prepišmo s prosojnic ali izračunamo:

$$x = C\sin\omega t + D\cos\omega t, \quad \omega = \sqrt{k/m} = 16.$$

Upoštevamo začetni pogoj in dobimo

$$x(0) = D = 0.2, \dot{x}(0) = \omega C = 0$$

$$x(t) = 0.2\cos(16t), \quad x(\pi/2) = x(2\pi) = 0.2.$$

- *Enačba gibanja je v tem primeru*

$$2\ddot{x} = -40\dot{x} - 128x, \quad \textit{torej} \quad \ddot{x} + 20\dot{x} + 64 = 0.$$

Zapišemo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 + 20\lambda + 64 = 0, \quad \lambda = -10 \pm \sqrt{36}, \quad \lambda_1 = -16, \lambda_2 = -4.$$

Splošna rešitev je

$$x(t) = Ce^{-16t} + De^{-4t}.$$

Iz začetnega pogoja $x(0) = C + D = 0, \dot{x}(0) = -16C - 4D = 0.6$ *dobimo* $C = -0.05, D = 0.05$.