Lastnosti dreves s korenom

popolno drevo	popolno dvojiško	popolno trojiško	popolno d-tiško
št. vozlišč na nivoju i	2^i	3^i	d^i
št. listov	2^h	3^h	d^h
št. notranjih vozlišč	$2^h - 1$	$\frac{3^h - 1}{2}$	$\sum_{i=0}^{h-1} d^i = \frac{d^h - 1}{d - 1}$
št. vozlišč, n	$2^{h+1} - 1$	$\frac{3^{h+1} - 1}{2}$	$\sum_{i=0}^{h} d^i = \frac{d^{h+1} - 1}{d - 1}$
višina, h	$\lg(n+1) - 1$ $\lfloor \lg n \rfloor$	$\log_3(2n+1) - 1$ $\lfloor \log_3(2n) \rfloor$	$\log_d((d-1)n+1) - 1$ $\lfloor \log_d((d-1)n) \rfloor$
povprečna globina glede na h	$(h-1) + \frac{h+1}{2^{h+1} - 1}$	$h - \frac{1}{2} + \frac{h+1}{3^{h+1} - 1}$	$h - \frac{1}{d-1} + \frac{h+1}{d^{h+1} - 1}$
povprečna globina glede na n	$\lg(n+1) - 2 + \frac{\lg(n+1)}{n}$	$\log_3(2n+1) - 3/2 + \ldots$	$\log_d((d-1)n+1) - \frac{d}{d-1} + \frac{\log_d((d-1)n+1)}{(d-1)n}$
ocena povprečne globine	$\Theta(\lg n)$	$\Theta(\log_3 n)$	$\Theta(\log_d n)$

celovito drevo	dvojiško	trojiško	d-tiško
št. vozlišč	$2^h \leq n \leq 2^{h+1} - 1$	$\frac{3^h + 1}{2} \leq n \leq \frac{3^{h+1} - 1}{2}$	$\frac{d^h - 1}{d - 1} + 1 \leq n \leq \frac{d^{h+1} - 1}{d - 1}$
višina	$\lfloor \lg n \rfloor$	$\lfloor \log_3(2n) \rfloor$	$\lfloor \log_d((d-1)n) \rfloor$

poljubno drevo	dvojiško	trojiško	d-tiško
št. vozlišč	$h + 1 \leq n \leq 2^{h+1} - 1$	$h + 1 \leq n \leq \frac{3^{h+1} - 1}{2}$	$h + 1 \leq n \leq \frac{d^{h+1} - 1}{d - 1}$
višina	$\lfloor \lg n \rfloor \leq h \leq n - 1$	$\lfloor \log_3(2n) \rfloor \leq h \leq n - 1$	$\lfloor \log_d((d-1)n) \rfloor \leq h \leq n - 1$

Izpeljave

Spodnji in zgornji celi del logaritma. Naslednji izrek povezuje spodnji in zgornji celi del logaritma:

$$\lfloor \log n \rfloor + 1 = \lceil \log(n+1) \rceil. \tag{1}$$

Povprečna globina vozlišča za popolna dvojiška drevesa ($d = 2$). Verjetnost izbire vozlišča na nivoju i je $2^i/n$, torej

$$\sum_{i=0}^{h} \frac{2^i}{n} i = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{h} i2^i = \frac{(h-1)2^{h+1}+2}{n}. \tag{2}$$

Nadaljujemo lahko v dveh smereh: proti h ali n. Najprej izpeljimo povprečno globino v odvisnosti od h. Vstavimo $n = 2^{h+1} - 1$ v enačbo (2) in dobimo

$$(2) = \frac{(h-1)(2^{h+1}-1+1)+2}{2^{h+1}-1} = \frac{(h-1)(2^{h+1}-1)+(h-1)+2}{2^{h+1}-1} = (h-1) + \frac{h+1}{2^{h+1}-1}. \tag{3}$$

Drugi člen gre z večanjem h zelo hitro proti 0, pri $h = 5$ je že manjši od 0.1. Povprečna globina je torej tako praktično $h - 1$. Ker vemo, da $h = \Theta(\lg n)$, velja tudi, da je povprečna globina reda $\Theta(\lg n)$.

Vseeno si oglejmo še, kako natančno izračunamo povprečno globino v odvisnosti od n. Vstavimo $h = \lg(n+1) - 1$ v enačbo (3) in dobimo

$$(3) = (\lg(n+1) - 2) + \frac{\lg(n+1)}{n} = \lg(n+1) + \frac{\lg(n+1)}{n} - 2 = \Theta(\lg n).$$

Povprečna globina vozlišča za popolna d-tiška drevesa. Po zgledu povprečne globine za popolna dvojiška drevesa izpeljemo

$$\sum_{i=0}^{h} \frac{d^i}{n} i = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{h} id^i = \frac{d^{h+1}((d-1)h-1)+d}{n(d-1)^2}. \tag{4}$$

Najprej si oglejmo povprečno globino v odvisnosti od h. V enačbo (4) vstavimo $n = \frac{d^{h+1}-1}{d-1}$ in dobimo

$$(4) = \frac{(d^{h+1}-1+1)((d-1)h-1)+d}{(d^{h+1}-1)(d-1)} = \frac{(d-1)h-1}{d-1} + \frac{(d-1)h+d-1}{(d^{h+1}-1)(d-1)} = h - \frac{1}{d-1} + \frac{h+1}{d^{h+1}-1}. \tag{5}$$

Zadnji člen gre z večanjem h zelo hitro proti 0, drugi člen pa z večanjem d (sicer ne tako hitro). Če povzamemo: povprečna globina popolnega dvojiškega drevesa je blizu $h-1$, trojiškega blizu $h-1/2$, stiriškega $h-1/3$, petiškega $h-1/4$, itd. Skratka z večanjem stopnje drevesa gre povprečna globina (od $h-1$ pri dvojiškem) proti h.

Nadaljujmo še z povprečno globino v odvisnosti od n. Vemo že (glej tabelo), da $h = \log_d((d-1)n+1) - 1$. Zapišimo $L = \log_d((d-1)n+1)$, torej $h = L - 1$. Vstavimo h v enačbo (5) in dobimo

$$L - 1 - \frac{1}{d-1} + \frac{L}{d^L - 1} = \log_d((d-1)n+1) - \frac{d}{d-1} + \frac{\log_d((d-1)n+1)}{(d-1)n}.$$

Višina celovitega dvojiškega drevesa. Celovito dvojiško drevo višine h ima eno vozlišče več kot popolno dvojiško drevo višine $h-1$ in ima manj ali enako vozlišč kot popolno drevo višine h

$$2^h \leq n \leq 2^{h+1} - 1. \tag{6}$$

Najprej iz neenačb (6) izrazimo neenačbe za h. Nato pri izpeljavi najprej upoštevamo, da je h celoštevilska vrednost, potem pa uporabimo še (1).

$$\begin{aligned} \lg(n+1) - 1 &\leq h \leq \lg n \\ \lceil \lg(n+1) \rceil - 1 &\leq h \leq \lfloor \lg n \rfloor \\ \lfloor \lg(n) \rfloor &\leq h \leq \lfloor \lg n \rfloor \\ h &= \lfloor \lg n \rfloor \end{aligned}$$

Višina celovitega d-tiškega drevesa. Podobno je z d-tiškimi drevesi

$$\frac{d^h - 1}{d - 1} + 1 \leq n \leq \frac{d^{h+1} - 1}{d - 1}.$$

Da pokažemo $h = \lfloor \log_d((d-1)n) \rfloor$, najprej izrazimo neenačbi za h

$$\begin{aligned}
\log_d((d-1)n + 1) - 1 &\leq h \leq \log_d((d-1)(n-1) + 1) \\
\lceil \log_d((d-1)n + 1) \rceil - 1 &\leq h \leq \lfloor \log_d((d-1)(n-1) + 1) \rfloor \\
\lfloor \log_d((d-1)n) \rfloor &\leq h \leq \lfloor \log_d((d-1)n) \rfloor.
\end{aligned}$$

Tudi tukaj smo najprej upoštevali celoštevilskost h. Da smo dobili tretji neenačbi, pa smo na levi uporabili (1), na desni pa $(d-1)(n-1) + 1 \leq (d-1)n$ za $d \geq 2$.

Št. vozlišč in višina poljubnih dreves. Začnimo z dvojiškim drevesom. Pri dani višini ima izrojeno drevo (seznam) najmanj vozlišč, popolno dvojiško drevo pa največ vozlišč:

$$h + 1 \leq n \leq 2^{h+1} - 1.$$

Tako za višino h dobimo omejitvi

$$\lfloor \lg n \rfloor = \lceil \lg(n+1) \rceil - 1 \leq h \leq n - 1.$$

V splošnem, torej za poljubno d-tiško drevo pa velja

$$h + 1 \leq n \leq \frac{d^{h+1} - 1}{d - 1}$$

in nadalje

$$\lfloor \log_d((d-1)n) \rfloor = \log_d((d-1)n + 1) - 1 \leq h \leq n - 1.$$

Dokaz enačbe (1). Spodnji $\lfloor x \rfloor$ in zgornji $\lceil x \rceil$ celi del od x sta definirana z naslednjimi neenačbami. Spodnji del kot

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{oz.} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

in zgornji deli kot

$$\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil \quad \text{oz.} \quad x \leq \lceil x \rceil < x + 1.$$

Dokazati želimo

$$\lfloor \log n \rfloor + 1 = \lceil \log(n+1) \rceil.$$

Najprej označimo z

$$m + 1 = \lceil \log(n+1) \rceil,$$

kjer je m neko celo število. Po definiciji zgornjega celega dela velja:

$$\begin{aligned}
m < {} & \log(n+1) && \leq m + 1 \\
2^m < {} & n + 1 && \leq 2^{m+1} \\
2^m - 1 < {} & n && \leq 2^{m+1} - 1 \\
2^m \leq {} & n && < 2^{m+1} \\
m \leq {} & \log(n) && < m + 1
\end{aligned}$$

Iz zadnjih neenačb in definicije spodnega celega dela sledi, da $m = \lfloor \log n \rfloor$, kar smo želeli pokazati.