Tutorstvo - fizika, FRI

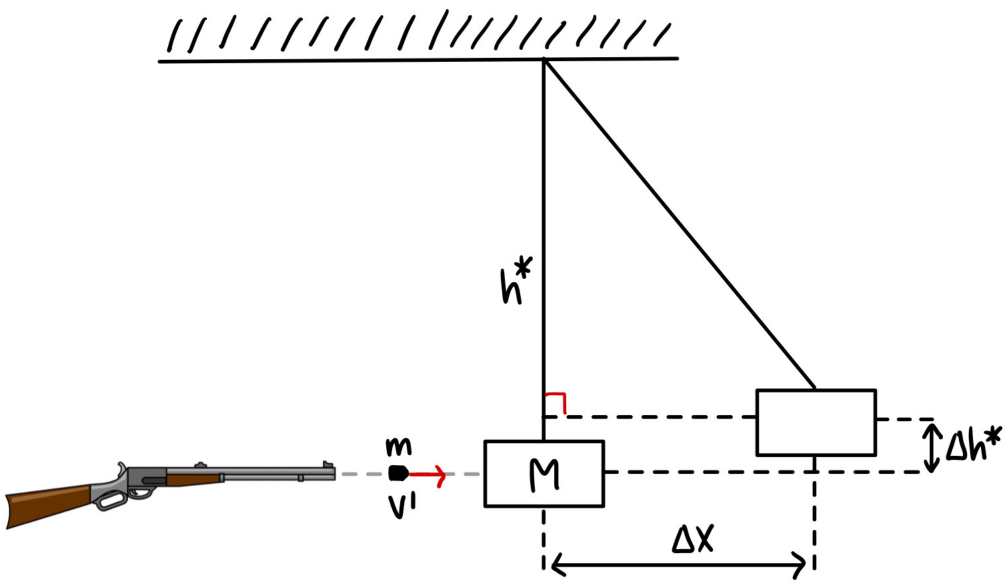
6. teden: Gibalna količina, navor

1. Balistično nihalo

Iz stropa VFP visi na 6 m dolgi vrvici klada z maso 320 g. Z zračno puško vanjo iztrelimo 0.5 g težek naboj, ki se zagozdi v kladi. Klada se iz ravnovesne lege odmakne za 18 cm v x-smeri. Kolikšna je bila hitrost izstrelka ob izstopu iz puške?

Rešitev:

Najprej si narišimo skico našega problema:



Ker je izstrelek obtičal v kladi, obravnavamo popolnoma neprožen trk. Vemo, da velja ohranitev gibalne količine v x-smeri:

$$mv' = (m + M)v \tag{1}$$

Pri tem je v' hitrost izstrelka ob izstopu iz puške in v hitrost klade z izstrelkom po trku.
Že iz srednje šole vemo, da se pri nihanju ohranja mehanska energija. Zato bo kinetična energija klade z izstrelkom takoj po trku enaka potencialni energiji klade z izstrelkom v skrajni legi odmika:

$$\frac{m + M}{2}v^2 = (m + M)g\Delta h^* \tag{2}$$

Da bomo iz enačbe (2) lahko izrazili hitrost v in jo vstavili v enačbo (1), potrebujemo še Δh^*. Iz pravokotnega trikotnika na sliki razberemo, da velja:

$$(h^* - \Delta h^*)^2 + (\Delta x)^2 = (h^*)^2$$

Ko odpravimo oklepaje dobimo kvadratno enačbo za Δh^*:

$$(\Delta h^*)^2 - 2h^*\Delta h^* + \Delta x^2 = 0,$$

katere rešitev je:

$$\Delta h^* = h^* \pm \sqrt{(h^*)^2 - \Delta x^2}$$

Da bomo dobili smiseln rezultat, moramo vzeti v enačbi - predznak. Iz enačbe (2) zdaj izrazimo v in ga vstavimo v enačbo (1):

$$mv' = (m+M)\sqrt{2g\Delta h^*}$$

Delimo celo enačbo še z m in vstavimo vanjo naš izraz za Δh^*:

$$v' = \frac{(m+M)}{m}\sqrt{2g(h^* - \sqrt{(h^*)^2 - \Delta x^2})} = 150 \text{ m/s}$$

TRIK:
Če bi se želeli izogniti temu grdemu izrazu v naši zadnji enačbi, bi lahko izraz za Δh^* razvili po Taylorju, da bi dobili:

$$\Delta h^* = h^* - \sqrt{(h^*)^2 - \Delta x^2} = h^* - h^*\sqrt{1 - (\frac{\Delta x}{h^*})^2} \approx h^* \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{h^{*2}} = \frac{\Delta x^2}{2h^*}$$

Tu smo uporabili dejstvo, da za majhne ε velja približek:

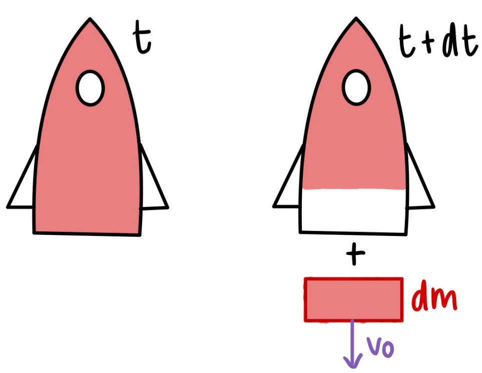
$$\sqrt{1-\varepsilon} \approx 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$$

Ta trik nam pogosto olajša kakšen račun, zato si ga je vredno zapomniti.

2. Raketa

Masa z gorivom napolnjene rakete Apolo je 3000 t. Kolikšno hitrost da pri izstrelitvi navpično navzgor motor prve stopnje, ki deluje 150 s, če izteče iz šobe v sekundi 14 t izgorelih plinov s hitrostjo 2,5 km/s glede na raketo?

Rešitev:



Razlaga skice: Ob nekem času t naša raketa miruje. Ob nekem kasnejšem času je raketa že izpustila nekaj goriva dm, ki se glede nanjo premika s hitrostjo v_0. Za ta sistem zapišimo ohranitev gibalne količine:

$$dG = -dm \cdot v_0 + m(t) \cdot dv = 0$$

Pri tem smo upoštevali, da se masa rakete s časom spreminja in da hitrost izpustov v_0 in hitrost rakete v kažeta v nasprotnih smereh. Odvisnost mase rakete od časa poznamo in je enaka $m(t) = m_0 - \phi_m t$. To vstavimo v našo enačbo:

$$m(t)dv = dmv_0$$
$$(m_0 - \phi_m t)dv = dmv_0$$

Ker se nam v enačbi pojavi čas, bomo morali po njem integrirati. Celo enačbo delimo z dt:

$$dv(m_0 - \phi_m t) = dmv_0$$
$$\frac{dv}{dt}(m_0 - \phi_m t) = \frac{dm}{dt}v_0$$

V izrazu dm/dt prepoznamo masni pretok. Spremenljivke ločimo in integriramo:

$$\frac{dv}{\phi_m v_0} = \frac{dt}{m_0 - \phi_m t}$$
$$\int_0^v \frac{dv}{\phi_m v_0} = \int_0^t \frac{dt}{m_0 - \phi_m t}$$

Za lažjo integracijo uvedemo v desni integral novo spremenljivko u:

$$u = m_0 - \phi_m t$$
$$du = -\phi_m dt$$
$$-\int_{m_0}^{m_0-\phi_m t} \frac{du}{\phi_m u} = \frac{1}{\phi_m} \ln \frac{m_0}{m_0 - \phi_m t}$$

Izraz za našo hitrost se torej glasi:

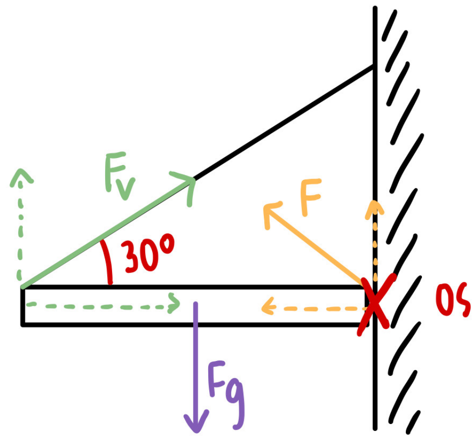
$$v = v_0 \cdot \ln \frac{m_0}{m_0 - \phi_m t} = 3.01 \text{ km/s}$$

Sedaj smo izračunali hitrost rakete v vesolju, ko nanjo ne deluje nobena druga sila. Ker pa raketa vzleti iz Zemlje, kjer nanjo deluje še sila teže, moramo tudi to upoštevati pri naših izračunih. Dejanska hitrost rakete je zato

$$v_{lab} = v - gt = 3.01 \text{ km/s} - 1.47 \text{ km/s} = 1.54 \text{ km/s}$$

3. Sile pri statiki

Krajišče deske s težo 50 N je preko ležaja pritrjeno na navpično steno. Desko drži v vodoravnem položaju vrv, ki veže drugo krajišče na steno. Kolikšna sila napenja vrv, če je kot med vrvjo in desko 30 ? Kolikšna je sila v ležaju?



Rešitev:

Os vrtenja postavimo v ležaj. Če z l označimo dolžino deske, je navor sile teže torej enak:

$$\vec{M}_{Fg} = |\frac{\vec{l}}{2} \times \vec{Fg}|$$

Navor sile vrvi pa:

$$\vec{M}_{Fv} = |\vec{l} \times \vec{Fv}|$$

Da se naša deska ne bo vrtela, morata biti navora enaka:

$$\frac{l}{2}F_g = l \cdot F_v \cdot \sin 30$$
$$\frac{l}{2}F_g = \frac{l}{2}F_v$$
$$F_v = F_g$$

Če želimo izračunati silo v ležaju postavimo os vrtenja v težišče. Tedaj že iz skice lahko opazimo, da bo morala biti zaradi simetrije sila v ležaju po velikosti enaka sili v vrvi, ter bo prav tako morala kazati pod kotom 30 . Lahko pa seveda to dokažemo tako, da enačimo sile v x in y smeri:

$$F_x = F_v \cdot \cos 30$$

$$F_y = F_g - F_v \cdot \sin 30 = F_v - F_v \cdot \sin 30 = \frac{F_v}{2} = F_v \cdot \sin 30$$