Tutorstvo - fizika, FRI

5. teden: Newtonov gravitacijski zakon, delo, moč in energija

1. Paličasta vesoljska postaja

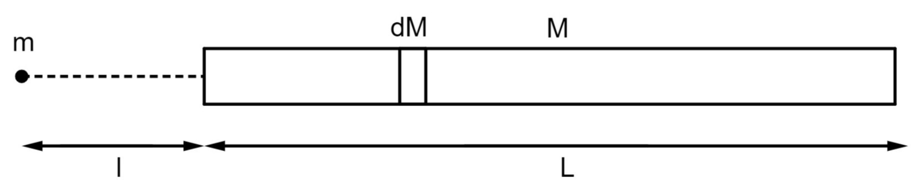
Astronavt v vesolju z maso m se nahaja na razdalji l od njemu bližjega krajišča vesoljske postaje mase M, ki ima obliko tanke homogene palice z dolžino L. Vesoljska postaja je vzporedna z zveznico med astronavtom in njenim težiščem. Poišči izraz za silo med astronavtom in vesoljsko postajo, če lahko astronavta obravnavaš kot točkasto telo.

Rešitev:

Pri tej nalogi bomo morali uporabiti Newtonov gravitacijski zakon, s pomočjo katerega lahko izračunamo velikost gravitacijske sile med dvema telesoma.

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

Vemo, da Newtonov gravitacijski zakon velja za točkasta in okrogla telesa. Ker pa naša vesoljska postaja ni točkasta ali okrogla, ga ne bomo mogli uporabiti direktno. Palico bomo razdelili na infinitezimalno majhne koščke z maso dM, ki jih lahko obravnavamo kot točkaste.



Vsak izmed koščkov prispeva majhno količino dF, ki jo lahko zapišemo kot

$$dF = \frac{Gm}{r^2}dM,$$

kjer r predstavlja razdaljo med astronavtom in posameznim koščkom. Prispevke vseh koščkov bomo sešteli tako, da bomo integrirali po celotni dolžini palice. Opazimo, da ima vsak košček drugačen r, kar pomeni, da bomo morali integrirati po r namesto po M in ustrezno nadomestiti dM z dr. Ker je palica homogena, je masa koščka sorazmerna z dolžino:

$$dM = \frac{M}{L}dr$$

Izraz za dM vstavimo v Newtonov gravitacijski zakon za en košček, ki ga nato pointegriramo:

$$dF = \frac{GmM}{L}\frac{dr}{r^2} \rightarrow \int_0^F dF = \frac{GmM}{L}\int_l^{L+l}\frac{dr}{r^2}$$

$$F = \frac{GmM}{L}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{L+l}\right)$$

2. Moč motorja

Moč motorja v nekem vozilu z maso $m = 10$ t narašča sorazmerno s kvadratom časa in doseže 10 s po vključitvi motorja 10 kW. Kolikšno pot opravi vozilo do tedaj in kolikšen je tedaj njegov pospešek?

Rešitev:

Ker vemo, da moč narašča sorazmerno s kvadratom časa, jo lahko napišemo v obliki

$$P(t) = Ct^2,$$

kjer je C konstanta, ki jo moramo še določiti. Upoštevamo, da znaša moč po 10 s 10 kW in dobimo:

$$C = \frac{P}{t^2} = 100\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{s}^2}$$

Uporabimo dejstvo, da je moč v nekem trenutku enaka produktu sile in hitrosti in da je sila po drugem Newtonovem zakonu enaka ma, saj na vozilo ne deluje nobena druga zunanja sila.

$$P = Fv = mav = m\frac{dv}{dt}v = Ct^2$$

V zgornji vrstici smo upoštevali dejstvo, da je pospešek enak odvodu hitrosti po času. Preden integriramo zadnjo enakost, moramo še ločiti spremenljivke:

$$mvdv = Ct^2dt \to m\int_0^v vdv = C\int_0^t t^2dt \to \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{3}Ct^3$$

Do istega izraza bi prišli, če bi zapisali moč kot odvod dela po času in s pomočjo integracije izračunali delo, ki ga motor opravi.

$$P = \frac{dA}{dt} \to dA = Pdt \to A = \int_0^t P(t)dt = C\int_0^t t^2dt = \frac{1}{3}Ct^3$$

Sedaj uporabimo izrek o kinetični energiji, ki pravi, da je delo vseh zunanjih sil enako spremembi kinetične energije oziroma $A = \Delta W_k$, in dobimo:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{3}Ct^3 \to v(t) = \sqrt{\frac{2C}{3m}}t^{3/2}$$

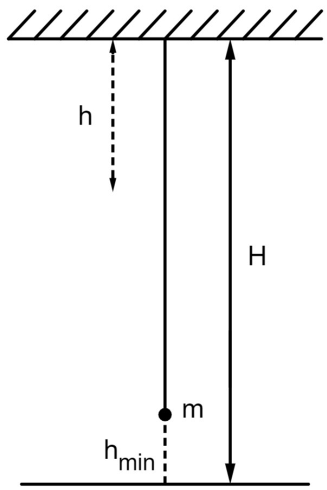
Do poti oz. pospeška pridemo z integriranjem oz. odvajanjem hitrosti.

$$x = \int_0^t v(t)dt = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2C}{3m}}t^{5/2} = 10.3\ \mathrm{m}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2C}{3m}}t^{1/2} = 0.387\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

3. Bungee jumping

Z mosta, ki se nahaja na višini $H = 100$ m nad reko, izvajamo bungee jumping z elastiko, katere prožnostni koeficient k znaša 20 N/m. Kolikšna je lahko največja možna višina prostega pada skakalca z maso $m = 80$ kg, če se mora najnižja točka skoka h_{min} iz varnostnih razlogov nahajati najmanj 2 m nad reko? Silo upora in maso elastike lahko zanemarimo.



Rešitev:

Pri rešitvi te naloge bomo uporabili ohranitev energije. Ko skakalec skoči, je elastika še neraztegnjena in skakalec prosto pada. Iskana višina bo torej enaka dolžini neraztegnjene elastike, ki je na skici označena s h. Postavimo ničlo potencialne energije na višino h_{min}. Na začetku skoka imamo samo potencialno energijo, ki znaša $W_p = mg(H - h_{min}) = mgh'$. V najnižji točki skoka je hitrost skakalca enaka 0, torej je tudi kinetična energija enaka 0. Imamo torej samo prožnostno energijo, ki znaša $W_{pr} = \frac{1}{2}kx^2$, kjer x predstavlja raztezek elastike. Iz skice je razvidno, da raztezek znaša $x = H - h_{min} - h = h' - h$. Iz ohranitve energije sledi, da mora biti celotna energija na začetku enaka celotni energiji na koncu, torej:

$$W_p = W_{pr}$$

$$mgh' = \frac{1}{2}k(h' - h)^2$$

Enačbo z obeh strani pomnožimo z $2/k$ in korenimo.

$$\frac{2mgh'}{k} = (h' - h)^2 \rightarrow h' - h = \pm\sqrt{\frac{2mgh'}{k}} \rightarrow h = h' \mp \sqrt{\frac{2mgh'}{k}}$$

Pred korenom izberemo predznak $-$, sicer dobimo kot rezultat višino, ki je večja od višine mosta.

$$h = h' - \sqrt{\frac{2mgh'}{k}} = 10.3 \text{ m}$$