1. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči bazo za $V := C(A)^\perp$ in določi njegovo dimenzijo.

   (b) Poišči bazo za $U := C(A^\mathsf{T})^\perp$ in določi njegovo dimenzijo. Zapiši še matriko $P_U$ pravokotne projekcije na $U$.

Rešitev: (a) $V = C(A)^\perp = N(A^\mathsf{T})$, zato $B_V = \{[4,3,-2]^\mathsf{T}\}$ in $\dim V = 1$.
(b) $U = C(A^\mathsf{T})^\perp = N(A)$, zato $B_U = \{[-1,0,1]^\mathsf{T}\}$ in $\dim U = 1$. $P_U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Dana sta matrika $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ in vektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

   (a) Ali je sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rešljiv?

   (b) Zapiši vektor $\mathbf{b}$ kot vsoto $\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{e}$ tako, da bo vektor $\mathbf{b}'$ v $C(A)$, vektor $\mathbf{e}$ pa bo na $C(A)$ pravokoten. Je taka vsota enolična?

   (c) Poišči rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}'$.

   (d) Zapiši matriko $P_{C(A)}$ pravokotne projekcije na podprostor $C(A) \subseteq \mathbb{R}^3$.

Rešitev: (a) Ni. (b) $\mathbf{b}' = [4,2,3]^\mathsf{T}$, $\mathbf{e} = [-2,1,2]^\mathsf{T}$. Vsota $\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{e}$ je enolična. (c) $\mathbf{x} = [2,-1]^\mathsf{T}$.
(d) $P_{C(A)} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

3. Funkcijo $f$ imamo dano pri petih vrednostih argumenta $x$:

| $x_i$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $2$ |

Želimo jo aproksimirati s funkcijo oblike $g(x) = ax + b$.

   (a) Iz enakosti $g(x_i) = f(x_i)$ dobimo (predoločen) sistem linearnih enačb za $a$ in $b$. Zapiši ta predoločen sistem; $A\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right] = \mathbf{f}$!

   (b) Zapiši pripadajoč normalni sistem; $A^\mathsf{T} A\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right] = A^\mathsf{T}\mathbf{f}$.

   (c) Določi parametra $a$ in $b$ po metodi najmanjših kvadratov, da bo $g$ najboljša aproksimacija za $f$ pri zgornjih podatkih.

Rešitev: (a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. (b) $A^\mathsf{T}A = \begin{bmatrix} 22 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$, $A^\mathsf{T}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \end{bmatrix}$.
(c) $a = 1$, $b = -1$, torej $g(x) = x - 1$.

4. Izmerjene vrednosti iz tabele

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $18$ | $2$ | $4$ | $12$ |

želimo aproksimirati s funkcijama $f$ in $g$ oblike

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ in } \ g(x) = ax^2 + c$$

po linearni metodi najmanjših kvadratov.

(a) Zapiši pripadajoča predoločena sistema.
(b) Reši ustrezna normalna sistema.
(c) Oceni vrednost, ki bi jo izmeril pri $x = 0$.

Rešitev: (a) Za funkcijo $f$ je matrika sistema $A_f = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, za funkcijo $g$ je matrika sistema $A_g = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Desna stran je v obeh primerih $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$.

(b) Sistem $A_f^\mathsf{T} A_f \mathbf{x}_f = A_f^\mathsf{T} \mathbf{b}$ ima rešitev $\mathbf{x}_f = [a, b, c]^\mathsf{T} = [4, -1, -1]^\mathsf{T}$, torej $f(x) = 4x^2 - x - 1$. Sistem $A_g^\mathsf{T} A_g \mathbf{x}_g = A_g^\mathsf{T} \mathbf{b}$ ima rešitev $\mathbf{x}_g = [a, c]^\mathsf{T} = [4, -1]^\mathsf{T}$, torej $g(x) = 4x^2 - 1$.

(c) Ocenjena vrednost je vrednost funkcije pri $x = 0$, torej $f(0) = -1$ oziroma $g(0) = -1$.