Osnove matematične analize

Osmi sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

23. november 2020

Uporaba odvoda

1. linearna aproksimacija funkcij,

   V bližini točke x_0 funckijsko vrednost računamo tako, da izračunamo tangento na graf funkcije in $f(x)$ aproksimiramo z vrednostjo na tangenti pri tem x.

   Tangenta v x_0:
   $$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}.$$
   Približek za $f(x_0 + h)$ za majhne h je
   $$\boxed{f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)h}.$$

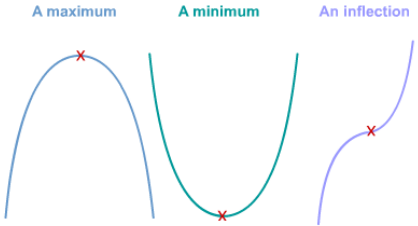
   Primera:
   $$\sqrt{0.98} = \sqrt{1 - 0.02} = \sqrt{1} - \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot 0.02 = 1 - 0.01 = 0.99.$$
   $$\cos\left(\frac{21\pi}{120}\right) = \cos\left(\frac{20\pi}{120} + \frac{\pi}{120}\right) = \cos\left(\frac{20\pi}{120}\right) - \sin\left(\frac{20\pi}{120}\right)\frac{\pi}{20}$$
   $$= \sqrt{3}2 - \frac{\pi}{40}.$$

2. analiza naraščanja in padanja funkcij,

   V točkah x, kjer je $f'(x) \geq 0$ (oz. $f'(x) > 0$), funkcija **narašča** (oz. **strogo narašča**). V točkah x, kjer je $f'(x) \leq 0$ (oz. $f'(x) < 0$), funkcija **pada** (oz. **strogo pada**).

3. iskanje stacionarnih točk in ekstremov funkcij,

   Točke x, kjer je $f'(x) = 0$ so **stacionarne**. Funkcija ima v x_0 **lokalni minimum** (oz. **lokalni maksimum**), če obstaja $\delta > 0$, tako da velja $f(x) \geq f(x_0)$ (oz. $f(x) \leq f(x_0)$) za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. **Lokalni ekstremi** funkcije so lokalni minimumi in lokalni maksimumi. Če ima funkcija lokalni ekstrem funkcije, potem je ta v stacionarni točki ali pa na robu defincijskega območja.



Prva trditev o obstoju lokalnih ekstemov:

- Če se predznak f' v stacionarni točki x_0 spremeni iz pozitivnega v negativnega, potem ima funkcija f v točki x_0 lokalni maksimum.
- Če se predznak f' v stacionarni točki x_0 spremeni iz negativnega v pozitivnega, potem ima funkcija f v točki x_0 lokalni minimum.
- Če se predznak f' v stacionarni točki x_0 ne spremeni, potem funkcija f v točki x_0 nima lokalnega ekstrema.

Če $f' : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ odvedljiva, potem je f **dvakrat odvedljiva** na $\mathcal{D}$, odvod funkcije f' pa zapišemo kot

$$\boxed{f''(x) = (f')'(x)}$$

in imenujemo **drugi odvod** funkcije f.

Če $f'' : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ odvedljiva, potem je f **trikrat odvedljiva** na $\mathcal{D}$, $f'''(x) = (f'')'(x)$ imenujemo **tretji odvod** funkcije f.

Če lahko funkcijo f n-krat odvajamo na $\mathcal{D}$, potem pravimo, da je funkcija f ***n*-krat odvedljiva** na $\mathcal{D}$, ***n*-ti odvod** funkcije f pa označimo z

$$\boxed{f^{(n)} = (f^{(n-1)})'(x).}$$

Druga trditev o obstoju lokalnih ekstremov:

- Če je $f''(x_0) < 0$, kjer je x_0 stacionarna točka, potem ima funkcija f v točki x_0 lokalni maksimum.
- Če je $f''(x_0) > 0$, kjer je x_0 stacionarna točka, potem ima funkcija f v točki x_0 lokalni minimum.

Tretja trditev o obstoju lokalnih ekstremov: Če v stacionarni točki x_0 funkcije f velja $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, potem naj bo n najmanjše naravno število, ki zadošča

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad \text{in} \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

- Če je n liho število, potem v x_0 ni lokalnega ekstrema.
- Če pa je n sodo število, potem je v primeru:
  - $f^{(n)}(x_0) > 0$ točka x_0 lokalni minimum.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0$ točka x_0 lokalni maksimum.

Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ima v točki x_0:

- **globalni maksimum**, če velja $f(x_0) \geq f(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}$.
- **globalni minimum**, če velja $f(x_0) \leq f(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}$.
- **globalni ekstrem**, če je v x_0 globalni minimum ali globalni maksimum.

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija. Na $[a, b]$ iščemo globalni ekstrem po naslednjem postopku:

- Določimo vse stacionarne točke $x_1, \ldots, x_n$ in izračunamo vse funkcijske vrednosti $f(x_1), \ldots, f(x_n)$.
- Izračunamo vrednosti $f(a), f(b)$.
- Poiščemo največjo vrednost iz zgornjih korakov.

Primer: Določimo globalne ekstreme funkcije $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$ na intervalu $[-8, 4]$.

- $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$. Stacionarne točke zadoščajo $f'(x) = 0$ oz. $x^2 + 2x - 12 = (x + 4)(x - 2) = 0$. Torej $x_1 = -4$ in $x_2 = 2$.
- $f''(x) = 6x + 6$. Ker je $f''(-4) = -18$, je x_1 lokalni maksimum. Ker je $f''(2) = 18$, je x_2 lokalni minimum.
- Izračunamo $f(-8) = -128$, $f(-4) = 80$, $f(2) = -28$ in $f(4) = 16$. Torej je $x = -8$ globalni minimum, x_1 pa globalni maksimum.

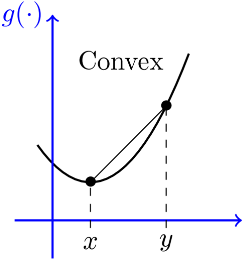
4. analiza konveksnosti in konkavnosti funkcij,

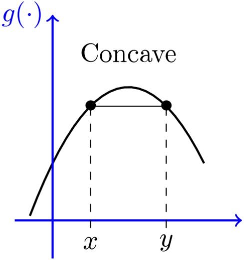
Funkcija f je **konveksna** na intervalu (a, b), če za vsaki točki $x, y \in (a, b)$ graf funkcije leži **pod sekanto** skozi točki $(x, f(x))$ in $(y, f(y))$.

Funkcija f je **konkavna** na intervalu (a, b), če za vsaki točki $x, y \in (a, b)$ graf funkcije leži **nad sekanto** skozi točki $(x, f(x))$ in $(y, f(y))$.

Če je $f''(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a, b)$, je f konveksna na (a, b).

Če je $f''(x) \leq 0$ za vsak $x \in (a, b)$, je f konkavna na (a, b).





5. risanje grafov funkcij

Za izris grafa funkcije $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ lahko upoštevamo naslednje:

1. Določimo definicijsko območje $\mathcal{D}_f$, ničle ter obnašanje funkcije na robu definicijskega območja.
2. Izračunamo odvod f'. Ničle odvoda nam določajo stacionarne točke, predznak pa območja naraščanja in padanja.
3. Izračunamo drugi odvod f''. Predznak f'' nam pove, kje je funkcija f konveksna in kje konkavna.

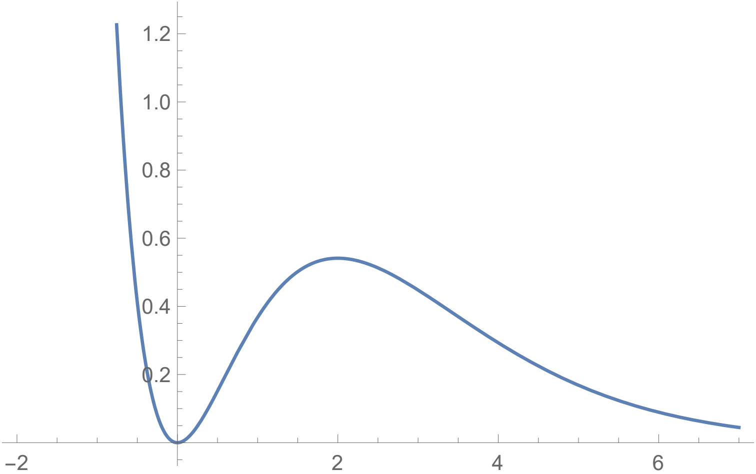
Narišimo graf funkcije $f(x) = x^2e^{-x}$.

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Ničla je $x = 0$. Obnašanje na robu:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x} = \infty \quad \text{in} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

- $f'(x) = e^{-x}x(2-x)$ in $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$.
- Stacionarni točki sta $x_1 = 0$ in $x_2 = 2$. Ker je $f''(0) = 2$, je x_1 lok. minimum. Ker je $f''(2) = -2e^{-2} < 0$, je x_2 lok. maksimum.
- $f'(x) > 0$ natanko za $x \in (0, 2)$. Torej je f naraščajoča na intervalu $(0, 2)$ in padajoča na $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.
- $f''(x) > 0$ natanko za $x \in (-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, \infty)$. Tu je funkcija konveksna. Na intervalu $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ pa je f konkavna.

$f(x) = x^2 e^{-x}$



6. Računanje limit: L'Hospitalovo pravilo 1

Izrek

Naj bosta f, g odvedljivi funkciji na intervalu (a, b), tako da je $g(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a, b)$. Naj bo $c \in (a, b)$ tak, da velja eden od naslednjih pogojev:

1. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0.$
2. $\lim\limits_{x \to c} f(x) \in \{-\infty, \infty\}$ *in* $\lim\limits_{x \to c} g(x) \in \{-\infty, \infty\}.$

Potem je

$$\boxed{\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}},$$

če desna limita obstaja.

Primera. Naj bo $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{x \to 0} x^n \log x = \lim_{x \to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^n}} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-n \frac{1}{x^{n+1}}} = \lim_{x \to 0} -\frac{1}{n} x^n = 0,$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \frac{0}{0}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0.$$

6. Računanje limit: L'Hospitalovo pravilo 2

Izrek

Naj bosta f, g odvedljivi funkciji na intervalu (A, ∞), tako da je $g(x) \neq 0$ za vsak $x \in (A, \infty)$. Naj velja eden od pogojev:

1. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0.$
2. $\lim_{x \to \infty} f(x) \in \{-\infty, \infty\}$ *in* $\lim_{x \to \infty} g(x) \in \{-\infty, \infty\}.$

Potem je

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}},$$

če desna limita obstaja.

Primeri.

$$\lim_{x \to \infty} x^2(e^{-x^{-2}} - 1) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x^{-2}} - 1}{x^{-2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^{-3}e^{-x^{-2}}}{-2x^{-3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x^{-2}}}{-1} = -1.$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p_n(x)}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{e^x} = \ldots = \lim_{x \to \infty} \frac{n! a_n}{e^x} = 0.$$

7. Natančnejša aproksimacija funkcije

Spomnimo se linearne aproskimacije funkcije v okolici točke x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Izkaže se, da je lahko to še izboljšamo z naslednjim zaporedjem aproksimacij:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2,$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3,$$

$$\vdots$$

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{T_n(x;x_0)}.$$

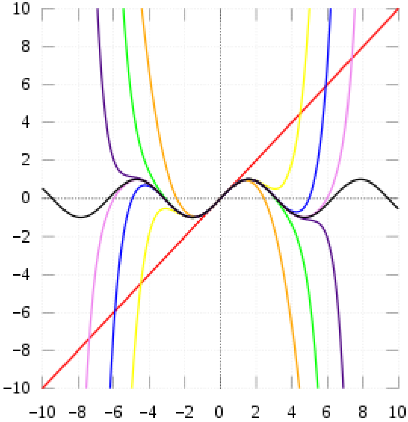
Polinomu $T_n(x; x_0)$ pravimo **Taylorjev polinom stopnje n** funkcije f v točki x_0 in zadošča

$$T_n(x_0; x_0) = f(x_0),\ T_n'(x_0; x_0) = f'(x_0),\ \ldots,\ T_n^{(n)}(x_0; x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Torej se vsak naslednji Taylorjev polinom bolj prilega grafu funkcije f v okolici točke x_0, saj se ujema še v enem odvodu višje stopnje.

7. Natančnejša aproksimacija funkcije

Izboljševanje prileganja Taylorjevih polinomov z naraščanjem stopnje n za funkcijo $f(x) = \sin x$ (črna krivulja na grafu). Stopnja krivulj narašča od rdeče krivulje ($n = 1$) prek oranžne, rumene, zelene, modre, vijolične, do roza krivulje.



7. Natančnejša aproksimacija funkcije - Taylorjeva formula

Izrek

Če je f vsaj $(n+1)$-krat odvedljiva v točki x_0, potem na nekem intervalu okrog x_0 velja **Taylorjeva formula***:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(f(x)),$$

kjer je

$$R_n(f(x)) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

za nek c med x_0 in x.

Če je f neskončnokrat odvedljiva v točki x_0, potem ji lahko priredimo **Taylorjevo vrsto** v točki x_0:

$$T_f(x; x_0) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots.$$

Če v točki x velja $\lim_{n\to\infty} R_n(f(x)) = 0$, potem je $f(x) = T_f(x; x_0)$.

Taylorjevi polinomi elementarnih funkcij okrog $x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(e^x), \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(\sin x), \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k}(\cos x), \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + R_n\Big(\frac{1}{1-x}\Big).
\end{aligned}
$$

Primer

Ocenimo vrednost funkcije $f(x) = \sin x$ v okolici točke $x_0 = 0$ z linearno in kvadratno aproksimacijo in ocenimo napaki.

Velja

$$\sin x = T_1(x) + R_1(\sin x) = x + \frac{-\sin c}{2!}x^2,$$
$$\sin x = T_2(x) + R_2(\sin x) = x + \frac{-\cos c_2}{3!}x^3.$$

Velja:

$$|R_2(x)| = \frac{|f^{(3)}(c)|}{6}|x|^3 = \frac{|\cos c|}{6}|x|^3 \leq \frac{|x|^3}{6}.$$

- Približek $\sin \pi/8 = \pi/8$ ima tako absolutno napako največ
$$\left(\frac{\pi}{8}\right)^3 \frac{1}{6} < \left(\frac{3.2}{8}\right)^3 \frac{1}{6} = \frac{4^2}{8^3} < 0.25 \cdot \frac{1}{8} = 0.03125,$$
torej je ocena $\sin \pi/8 \doteq \pi/8 \doteq 0.4$ na eno decimalno mesto natančna.
- $\sin x \doteq x$ je na dve decimalki natančna ocena, če je
$$\frac{|x|^3}{6} < 0.5 \cdot 10^{-2}, \quad |x| < \frac{\sqrt[3]{30}}{10},$$
torej za vsak kot x velikosti $|x| < \dfrac{3}{10}$, kar je približno 18°.