1. Izračunaj spodnje determinante

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$,

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$,

(c) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$,

(d) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 & -5 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Rešitev: (a) 1, (b) 2, (c) 14, (d) 216.

2. Za katere vrednosti parametrov x oziroma a spodnji matriki *nimata* inverza?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ x^3 & x & 0 & x^2 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & x+1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -1 & a & a^2-1 & 1 \\ 0 & a & -1 & 1 \\ -1 & -a & 1-a^2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Rešitev: (a) $x = -1, 0, 1$, (b) $a = 0$.

3. Izračunaj spodnje determinante ali pa vsaj poišči rekurzivno zvezo, ki jih izraža.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Rešitev: Označimo z d_n determinanto $n \times n$ matrike take oblike.
Tedaj je: (a) $d_n = d_{n-1} - d_{n-2}$, kjer $d_1 = 1$ in $d_2 = 0$, (b) $d_n = 2 - n$.

4. Iz matrik $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sestavimo $2n \times 2n$ bločno matriko

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}.$$

Prepričaj se, da velja formula

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\right) = \det(A+B) \cdot \det(A-B).$$

Ali je ta determinanta enaka $\det(A^2 - B^2)$? Utemelji ali pa poišči protiprimer!

Rešitev: V splošnem $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\right)$ *ni enako* $\det(A^2 - B^2)$, za npr. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $B = A^\mathsf{T}$ ne velja.

5. Dani sta matriki

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj determinante matrik S, T, ST, ST^{-1} ter $(S-T)^{-1}$.

Rešitev: $\det(S) = 8$, $\det(T) = 8$, $\det(ST) = 64$, $\det(ST^{-1}) = 1$, $\det((S-T)^{-1}) = 1$.

6. Naj bosta $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ poljubna vektorja iz $\mathbb{R}^n$.

   (a) Izrazi determinanto matrike

   $$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{y}^\mathsf{T} \\ \mathbf{x} & I \end{bmatrix}$$

   z enostavno formulo $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$.
   Namig: Naredi 'bločno Gaussovo eliminacijo' na prvem stolpcu matrike A.

   (b) Kako bi izračunal $\det(I+\mathbf{x}\mathbf{y}^\mathsf{T})$? Koliko je $\det(I+\mathbf{x}\mathbf{y}^\mathsf{T})$, če sta $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ pravokotna vektorja?

Rešitev: (b) $\det(I+\mathbf{x}\mathbf{y}^\mathsf{T}) = 1 + \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{x}$, če $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ je torej $\det(I+\mathbf{x}\mathbf{y}^\mathsf{T}) = 1$.