

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Tretji izpit iz Linearne algebre
Teoretični del, 4. september 2024

Vsa vprašanja so enakovredna. Vsako je vredno 1 točko. Za reševanje imate 45 minut. Obkrožite pravilni odgovor in ga **utemeljite**. Za nepravilen odgovor dobite 0 točk, za utemeljitev pravilnega odgovora pa lahko dobite 0 ali 1/4 ali 1/2 ali 3/4 ali 1 točko. Če je utemeljitev povsem napačna, tudi pravilen odgovor ne prinaša točk.

1. Obstajata *neničelna* vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, tako da je $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

DA / NE *Utemeljitev:*

2. Naj bosta $\Pi_1 : 2x + 3y + 4z = 5$, $\Pi_2 : 2x + 3y + 4z = 6$ ravnini in $A = (1, 0, 0)$ točka v \mathbb{R}^3 . Obstaja točka B na ravnini Π_2 , tako da premica skozi točki A in B ne prebada ravnine Π_1 .

DA / NE *Utemeljitev:*

3. Naj bo $S \subset \mathbb{R}^9$ množica vektorjev in $\text{Lin}(S)$ njena linearna ogrinjača. Obstaja vektorski podprostor V , ki zadošča $S \subseteq V \subseteq \text{Lin}(S)$ in $V \neq \text{Lin}(S)$.

DA / NE *Utemeljitev:*

4. Matrika A ima karakteristični polinom enak $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$. Potem je dimenzija $\ker(A - I)$ lahko 3. Tu I označuje identično matriko ustrezne velikosti.

DA / NE *Utemeljitev:*

5. Obstajata realni matriki A in B velikosti 4×4 z naslednjimi lastnostmi:

(a) $\det(A) = 0$,

(b) $\det(B) = 16$ in

(c) natanko ena izmed matrik $A + B$ in AB je obrnljiva.

DA / NE *Utemeljitev:*

6. Naj bo A 3×3 matrika, $\vec{u} = (0 \ 0 \ 1)^T$ vektor v njenem jedru, $\vec{v} = (0 \ 1 \ 2)^T$ in $\vec{w} = (1 \ 0 \ 0)^T$ pa lastna vektorja pri lastni vrednosti 1. Matrika A je simetrična.

DA / NE *Utemeljitev:*

7. Dana je matrika

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 5.21 & \alpha & 7.12 \\ 2 & -6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ne obstaja $\alpha \in \mathbb{R}$, da bo A obrnljiva matrika.

DA / NE *Utemeljitev:*

8. Obstajajo linearne preslikave

$$L_1 : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad L_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{2024}, \quad L_3 : \mathbb{R}^{2024} \rightarrow \mathbb{R}^7,$$

da ima linearna preslikava

$$L := L_3 \circ L_2 \circ L_1 : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$$

dimenzijo slike $\text{im}(L)$ enako 5.

DA / NE *Utemeljitev:*

9. Naj bosta A matrika velikosti 5×4 in $b \in \mathbb{R}^5$ vektor, tako da velja $\|AA^+b - b\| > 0$. Tu je A^+ Moore-Penroseov inverz matrike A . Ali je sistem $Ax = b$ rešljiv?

DA / NE *Utemeljitev:*

10. Naj bo $Q \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$ matrika, za katero velja $Q^T Q = I_3$. Potem je $QQ^T = I_5$. Tu sta I_3 in I_5 identični matriki velikosti 3×3 in 5×5 .

DA / NE *Utemeljitev:*