Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Linearna algebra: računski izpit

4. september 2024

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Dani sta točka $A(0,-2,3)$ in premica $p : \frac{x-3}{2} = y+1 = z-2$.

a) (5) Določi enačbo ravnine Σ, ki vsebuje točko A in premico p.

b) (5) Določi enačbo premice q, ki je pravokotna na ravnino Σ in vsebuje točko A.

c) (10) Določi projekcijo A' točke A na premico p.

d) (5) Določi razdaljo med premicama p in q.

2. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix},$$

kjer je $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) (10) Poišči vse rešitve sistema $A\vec{x} = \vec{0}$.

b) (10) Ali obstaja tak $\alpha \in \mathbb{R}$, da bo imel sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ več kot eno rešitev?

c) (5) Ali obstaja tak $\alpha \in \mathbb{R}$, da bo sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ protisloven?

3. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) (10) Poišči *ortonormirano bazo* stolpčnega prostora matrike A.

b) (10) Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\vec{v} = [-1, 5, 1, 3]^\mathsf{T}$ na $C(A)$.

c) (5) Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\vec{v} = [-1, 5, 1, 3]^\mathsf{T}$ na $C(A)^\perp$.

4. naloga (25 točk)

Zaporedji a_n in b_n sta podani rekurzivno z začetnima členoma $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ in zvezama

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 3b_{n-1}, \\ b_n &= 3a_{n-1} + b_{n-1}. \end{aligned}$$

a) (5) Poišči matriko A, za katero lahko sistem rekurzivnih formul zapišemo v matrični obliki kot

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}.$$

b) (10) Poišči lastni vrednosti $\lambda_1 > \lambda_2$ in pripadajoča lastna vektorja $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$ matrike A.

c) (5) Začetni vektor $\vec{x}_1 = [a_0, b_0]^\mathsf{T} = [2, 0]^\mathsf{T}$ razvij po bazi $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

d) (5) Za $\vec{x}_n = [a_n, b_n]^\mathsf{T}$ iz zveze $\vec{x}_n = A^n \vec{x}_0$ izpelji splošni formuli za a_n in b_n.