Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
Σ	

Linearna algebra: 3. računski izpit

16. avgust 2021

Čas pisanja: 70 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

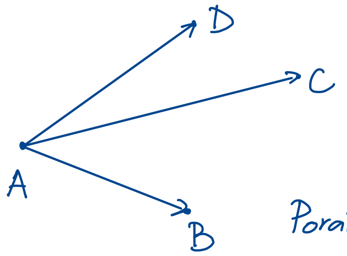
1. naloga (15 točk)

V prostoru $\mathbb{R}^3$ so dane točke:

$$A(3,6,3),\ B(6,3,9),\ C(-3,3,6)\ \text{ in }\ D(-3,6,6).$$

a) (5) Ali točke A, B, C in D ležijo na isti ravnini?

5



Te točke ležijo na isti ravnini, če sta (npr.) $\vec{AB}\times\vec{AC}$ in $\vec{AB}\times\vec{AD}$ vzporedna.

Poračunamo:

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{bmatrix}3\\-3\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-6\\-3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\-45\\27\end{bmatrix},\quad \vec{AB}\times\vec{AD}=\begin{bmatrix}3\\-3\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-6\\0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9\\-45\\18\end{bmatrix},$$

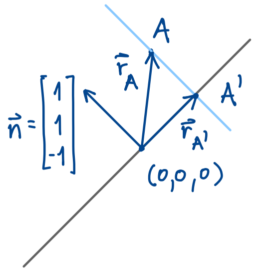
ta dva vektorja jasno nista vzporedna, torej A, B, C in D ne ležijo na isti ravnini.

b) (10) Točke A, B, C in D projiciramo na ravnino z enačbo $x+y-z=0$. Ali se projekciji daljic AD in BC sekata? Če se, poišči njuno presečišče!

Naj bodo A', B', C', D' projekcije teh točk na ravnino $x+y-z=0$.

Hitro opazimo $B' = B$, saj B leži na tej ravnini. Ker gre ta ravnina skozi izhodišče, bo projekcije ostalih točk enostavno poiskati:

5

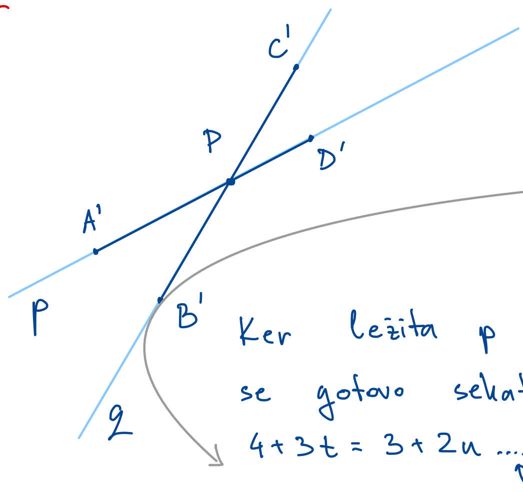


$$\vec{r}_{A'} = \vec{r}_A - \mathrm{proj}_{\vec n}\vec{r}_A = \vec{r}_A - \frac{\vec n\cdot\vec{r}_A}{\vec n\cdot\vec n}\vec n = \begin{bmatrix}3\\6\\3\end{bmatrix} - \frac{6}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\4\\5\end{bmatrix} \ldots A'(1,4,5)$$

$$\vec{r}_{C'} = \vec{r}_C - \mathrm{proj}_{\vec n}\vec{r}_C = \begin{bmatrix}-3\\3\\6\end{bmatrix} - \frac{-6}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\5\\4\end{bmatrix} \ldots C'(-1,5,4)$$

$$\vec{r}_{D'} = \vec{r}_D - \mathrm{proj}_{\vec n}\vec{r}_D = \begin{bmatrix}-3\\6\\6\end{bmatrix} - \frac{-3}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\7\\5\end{bmatrix} \ldots D'(-2,7,5)$$

5



Vzemimo parametrizaciji za p in q:

$$p:\ \vec r(t) = \vec r_{A'} + t\,\vec{A'D'} = \begin{bmatrix}1\\4\\5\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-3\\3\\0\end{bmatrix},$$

$$q:\ \vec r(u) = \vec r_{B'} + u\,\vec{B'C'} = \begin{bmatrix}6\\3\\9\end{bmatrix} + u\begin{bmatrix}-7\\2\\-5\end{bmatrix}.$$

Ker ležita p in q na isti ravnini (in nista vzporedni), se gotovo sekata. Kje?

$$4+3t = 3+2u \ \ldots\ t = \frac{1}{5}$$
$$5 = 9-5u \ \ldots\ u = \frac{4}{5}$$

$$\ldots\ \vec r_P = \begin{bmatrix}1\\4\\5\end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3\\3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/5\\23/5\\5\end{bmatrix} \ldots P\left(\frac{2}{5}, \frac{23}{5}, 5\right).$$

Ker je $0 \le t, u \le 1$, se sekata tudi daljici $A'D'$ in $B'C'$.

2. naloga (20 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

S predpisom $\varphi(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{a} \times \vec{x}$ definiramo linearno preslikavo $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

a) ($\cancel{5}$ 10) Poišči matriko M, ki pripada preslikavi φ v standardni bazi.

10

$$S_{\mathbb{R}^3} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftarrow \text{std. baza } \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(\vec{i}) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{i} - \vec{j},$$

$$\varphi(\vec{j}) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{i} - \vec{j},$$

$$\varphi(\vec{k}) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\vec{j} - \vec{k}.$$

Torej: $A_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

b) ($\cancel{5}$ 10) Naj bo $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : A\vec{x} = \vec{a} \times \vec{x}\}$. Dokaži, da je U vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$ in poišči bazo za U.

5

Vzemimo $\vec{x}, \vec{y} \in U$ ter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tedaj je:

$$A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y} \overset{\vec{x},\vec{y} \in U}{=} \alpha(\vec{a} \times \vec{x}) + \beta(\vec{a} \times \vec{y}) = \vec{a} \times (\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}),$$

tj. $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in U$, U je zaprta za linearne kombinacije, torej je U vektorski podprostor.

5

Baza: Opazimo $A\vec{x} = \vec{a} \times \vec{x} \ldots A\vec{x} - \vec{a} \times \vec{x} = \vec{0} \ldots \varphi(\vec{x}) = \vec{0} \ldots A_\varphi \vec{x} = \vec{0}$, tj. $U = N(A_\varphi)$. Torej:

$$A_\varphi \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} \in U \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x_2 \in \mathbb{R},$$

$$B_U = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. naloga (15 točk)

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) (9) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.

5

- Lastne vrednosti:

$$\Delta_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \underbrace{\begin{vmatrix} 3-\lambda & -3-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{= \begin{vmatrix} -2\lambda & -3-\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} - \lambda \underbrace{\begin{vmatrix} 3-\lambda & -3-\lambda \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}} = 4\lambda - \lambda\left(\lambda^2 - 2\lambda - 3 + 6 + 2\lambda\right) =$$

$$= \lambda(4-\lambda^2-3) = \lambda(1-\lambda^2) = \lambda(1-\lambda)(1+\lambda) = 0 \ \ldots \ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1.$$

4

- Pripadajoči lastni vektorji:

$\lambda_1 = -1$: $A + I = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ldots \ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$

$\lambda_2 = 0$: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ldots \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$

$\lambda_3 = 1$: $A - I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ldots \ \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

b) (3) Ali je mogoče matriko A diagonalizirati? Če da, zapiši diagonalno matriko D in prehodno matriko P, da bo $A = PDP^{-1}$, sicer pa utemelji, zakaj to ni mogoče.

3

Je, saj imamo bazo $\mathbb{R}^3$ iz lastnih vektorjev matrike A.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) (3) Izračunaj A^{100}.

3

$$A^{100} = PD^{100}P^{-1} \underset{\uparrow}{=} PD^2P^{-1} = A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -6 \\ -2 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

saj $D^{100} = D^2$ v tem primeru