Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Linearna algebra: računski izpit

8. junij 2023

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Dani sta točki $A(1,-1,1)$ in $B(0,3,7)$ ter premica p

$$p : -x-1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$$

a) (10) Določi enačbo ravnine Σ, ki vsebuje točko A in premico p.

b) (5) Izračunaj razdaljo med točko B in ravnino Σ.

c) (10) Določi enačbo premice q, ki vsebuje točko B in seka premico p pod pravim kotom.

2. naloga (25 točk)

Dani so vektorji

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \ \text{ter} \ \vec{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči vse vektorje $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, ki so pravokotni na $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ ter velja $\vec{d} \cdot \vec{x} = 3$.

3. naloga (25 točk)

Preslikavi $\phi, \psi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sta dani s predpisoma

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_4 \end{bmatrix} \quad \text{ter} \quad \psi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_4 \end{bmatrix}.$$

a) (10) Ali sta preslikavi ϕ in ψ linearni? Zakaj oz. zakaj ne? *Natančno utemelji!*

b) (8) Za vsako od preslikav ϕ oziroma ψ, ki je linearna, poišči matriko, ki ji pripada glede na standardni bazi prostorov $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$.

c) (7) Za vsako od preslikav ϕ oziroma ψ, ki je linearna, določi dimenziji pripadajočega jedra in slike.

4. naloga (25 točk)

Zaporedje je podano rekurzivno s formulo

$$a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

in začetnima členoma $a_0 = 0$ ter $a_1 = 1$.

a) (5) Rekurzivno formulo najprej zapiši v matrični obliki $\vec{x}_n = A\vec{x}_{n-1}$, kjer je $\vec{x}_n = [a_n, a_{n-1}]^\mathsf{T}$.

b) (10) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.

c) (10) Začetni vektor $\vec{x}_1 = [a_1, a_0]^\mathsf{T} = [1, 0]^\mathsf{T}$ razvij v bazi iz lastnih vektorjev matrike A in poišči eksplicitno formulo za a_n.