Linearna algebra: 2. popravni kolokvij

3. julij 2018

Čas pisanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne.
Dovoljena je uporaba dveh listov velikost A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*.
Vse odgovore dobro utemelji!

1	
2	
3	
4	
Σ	

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Dani sta premica

$$p : \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z-2}{3}$$

in ravnina

$$\Sigma : 2x - y - z = 4.$$

Ali premica p seka ravnino Σ? Če jo seka, poišči presečišče.

Poišči pravokotno projekcijo premice p na ravnino Σ. Dobljeno premico zapiši s kanonično enačbo.

Točkasto svetilo postavimo v $T(3, 3, 3)$. Poišči senco, ki jo meče premica p na ravnino Σ.

2. naloga (25 točk)

Dani so vektorji

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo X matrika, za katero velja $X\mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $X\mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$ in $X\mathbf{c} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$.

Zapiši matrično enačbo $XG = H$, ki ji zadošča matrika X, tj. izrazi stolpce matrik G in H z vektorji $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$.

Izračunaj determinatno matrike X, $\det(X)$.

Poišči matriko X.

3. naloga (25 točk)

Naj bo $\mathbf{a} = [1, 1, 1]^\mathsf{T}$. Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ima predpis

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Preveri, da je ϕ linearna preslikava.

Poišči matriko A_ϕ, ki pripada ϕ glede na standardno bazo $\mathbb{R}^3$.

Ali je vektor $\mathbf{a}$ vsebovan v $\ker \phi$? *Utemelji!*

Določi $\dim(\operatorname{im} \phi)$.

4. naloga (25 točk)

Zaporedje (a_n) je dano z rekurzivno zvezo

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

in začetnima členoma $a_0 = 0$ in $a_1 = 1$. S spodnjimi koraki določi eksplicitno formulo za a_n.

Zgornjo rekurzivno zvezo zapiši v obliki

$$\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1}$$

za vektor $\mathbf{x}_n = [a_n, a_{n-1}]^\mathsf{T}$. Poišči matriko A.

Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.

Poišči eksplicitno formulo za a_n.