Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Linearna algebra: 1. popravni kolokvij

11. junij 2019

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si.* **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Dani sta točki $A(1,-1,1)$ in $B(0,3,7)$ ter premica p

$$p\ :\ -x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}$$

a) (10) Določi enačbo ravnine Σ, ki vsebuje točko A in premico p.
Rešitev: Pomaga, če najprej zapišemo parametrično obliko premice p.

$$p(t)=\mathbf{r}_0+t\mathbf{p}=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}$$

od koder lahko preberemo smerni vektor premice $\mathbf{p}$ in dobimo koordinate ene točke na premici $\mathbf{r}_0$. Normalo na iskano ravnino lahko dobimo kot vektorski produkt smernega vektorja $\mathbf{p}$ in vektorjem med A in točko na premici.

$$\mathbf{n}=\mathbf{p}\times(\mathbf{r}_A-\mathbf{r}_0)=\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\-3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$$

Ker mora točka A ležati na ravnini, lahko enačbo ravnine zapišemo kot

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_A$$

oziroma

$$2x+2y-z=-1$$

b) (5) Izračunaj razdaljo med točko B in ravnino Σ.
Rešitev: Razdaljo lahko izračunamo po formuli

$$d(B,\Sigma(\mathbf{n},A))=\frac{|\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_A)|}{\|\mathbf{n}\|}=0,$$

kar pomeni, da B leži na ravnini Σ (kar lahko opazimo tudi direktno iz enačbe ravnine).

c) (10) Določi enačbo premice q, ki vsebuje točko B in seka premico p pod pravim kotom.
Rešitev: En način, da dobimo smerni vektor iskane premice $\mathbf{q}$, je, da od vektorja $\mathbf{v}=\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_0$ odštejemo projekcijo vektorja $\mathbf{v}$ od smernega vektorja $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}=\mathbf{v}-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}\mathbf{p}=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}-\frac{9}{9}\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$$

Potem lahko takoj zapišemo enačbo premice q.

$$q\ :\ \frac{x}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-7}{2}$$

2. naloga (25 točk)

Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ter $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Definiramo množici

$$U = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x}^\mathsf{T} A \mathbf{x} = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \text{in}$$
$$V = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \mathbf{a}^\mathsf{T} X \mathbf{a} = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

a) (15) Ali je U vektorski podprostor v $\mathbb{R}^2$? Ali je V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$? Utemelji oba odgovora!

Rešitev: Če zapišemo enačbo $\mathbf{x}^\mathsf{T} A \mathbf{x} = 0$ za dan A in vektor $\mathbf{x} = [x, y]^\mathsf{T}$, dobimo enačbo

$$x^2 + xy - y^2 = 0.$$

Vemo, da so edini vektorski podprostori v $\mathbb{R}^2$ (poleg $\{(0,0)\}$ in $\mathbb{R}^2$) premice, ki gredo skozi izhodišče $(0,0)$. Ker to ni enačba premice, U ni vektorski podprostor. (Upoštevali smo seveda tudi drugačne argumente).

Za $X, Y \in V$ ter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ lahko vidimo, da velja

$$\mathbf{a}^\mathsf{T}(\alpha X + \beta Y)\mathbf{a} = \alpha \mathbf{a}^\mathsf{T} X \mathbf{a} + \beta \mathbf{a}^\mathsf{T} Y \mathbf{a} = 0,$$

torej je vsaka linearna kombinacija elementov iz V tudi element V. To dokazuje, da V je vektorski podprostor.

b) (10) Za tisto podmnožico, ki je vektorski podprostor, določi njegovo dimenzijo in poišči bazo.

Rešitev : Množico V lahko opišemo z enačbo, če izračunamo $\mathbf{a}^\mathsf{T} X \mathbf{a}$ za dan $\mathbf{a}$ in

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Dobimo

$$\mathbf{a}^\mathsf{T} X \mathbf{a} = a - b - c + d = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0$$

Podprostor V bi torej lahko opisali kot ničelni prostor matrike $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ta ima očitno 3 proste spremenljivke in za bazo $N(B)$ lahko vzamemo vektorje

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ki predstavljajo bazne matrike za V

$$V_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ V_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

3. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

ter $V = N(A)$ njen ničelni prostor.

a) (10) Poišči ortonormirano bazo za $V^{\perp}$.
Rešitev : Upoštevamo, da je $V^{\perp} = N(A)^{\perp} = C(A^{\mathsf{T}})$, kar pomeni, da je treba ortogonalizirati vektorja

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{9}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Po normiranju dobimo ortonormirano bazo

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b) (10) Določi matriko pravokotne projekcije na $V^{\perp}$.
Rešitev : Zapišemo matriko

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

in računamo

$$P = QQ^{\mathsf{T}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) (5) Izračunaj pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{v} = [3, 0, 6, 0]^{\mathsf{T}}$ na podprostor V.
Rešitev : Projekcijio $\mathbf{v}$ na V lahko dobimo tako, da od $\mathbf{v}$ odštejemo projekcijo na V^{T}.

$$\mathrm{proj}_V \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathrm{proj}_{V^{\mathsf{T}}} \mathbf{v} = \mathbf{v} - P\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. naloga (25 točk)

Dana sta matrika A in vektor $\mathbf{v}$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

a) (4) Preveri, da je $\mathbf{v}$ lastni vektor matrike A. Kaj je pripadajoča lastna vrednost?
Rešitev : Direktno lahko izračunamo, da je $A\mathbf{v} = -2\mathbf{v}$. Pripadajoča lastna vrednost je torej -2.

b) (5) Izračunaj $(A^3 + A^2 + A)\mathbf{v}$.
Rešitev : Če je $A\mathbf{v} = -2\mathbf{v}$, je tudi $A^n\mathbf{v} = (-2)^n\mathbf{v}$ (vsaj) za vsa naravna števila n. Potem je

$$(A^3 + A^2 + A)\mathbf{v} = (-2)^3\mathbf{v} + (-2)^2\mathbf{v} + (-2)\mathbf{v} = -6\mathbf{v}$$

c) (8) Poišči vse lastne vrednosti matrike A.
Rešitev : Izračunamo karakterični polinom, pri čemer si pomagamo z Gaussovo eliminacijo.

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 & 4 \\ 1 & -\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 2-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 4 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 4 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-2-\lambda)^2\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)^2(4-\lambda)^2
\end{aligned}$$

Pri tem smo nekaj vmesnih korakov izpustili. Seveda je možno priti do rezultata tudi z drugačnim zaporedjem korakov. Imamo torej dve lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = -2$ in $\lambda_{3,4} = 4$. Obe imata algebraično večkratnost enaka 2.

d) (8) Ugotovi, ali je A podobna diagonalni matriki, ali pa razloži, zakaj ni.
Rešitev : Preveriti je potrebno, ali je geometrijska večkratnost obeh lastnih vrednosti (torej dimenzija lastnih podprostorov $N(A - \lambda_i I)$) tudi enaka 2. Za primer $\lambda = 4$ lahko z Gaussovo eliminacijo dobimo

$$A - 4I \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vidimo, da imamo samo eno prosto spremenljivko, kar pomeni, da je $\dim N(A-4I) = 1$. Matrike A torej ni možno diagonalizirati.