2. kolokvij iz Linearne algebre
(Ljubljana, 4. 6. 2015)

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega ali dveh A4 listov s formulami. Rezultati bodo objavljeni na strani `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Podane imamo vrednosti neznane funkcije f.

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	18	2	4	12

Določiti hočemo funkcijo g oblike

$$g(x) = ax^2 + b,$$

ki po metodi najmanjših kvadratov najbolje aproksimira funkcijo f.

(a) Zapiši predoločen sistem enačb za neznana koeficienta a in b.

(b) Zapiši ustrezen normalni sistem za a in b.

(c) Reši ta normalni sistem in oceni vrednost $f(0)$.

Rešitev

(a) Predoločen sistem dobimo tako, da za vsak podatek iz tabele (x_i, y_i) zapišemo enačbo

$$y_i = ax_i^2 + b.$$

Tako dobimo predoločen sistem enačb

$$\begin{aligned}(-2)^2 a + b &= 18\\ (-1)^2 a + b &= 2\\ 1^2 a + b &= 4\\ 2^2 a + b &= 12,\end{aligned}$$

ki ga lahko zapišemo v matrični obliki $Ax = y$ z $x = [a, b]^\mathsf{T}$ in

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 1\\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad y = \begin{bmatrix} 18\\ 2\\ 4\\ 12 \end{bmatrix}.$$

(b) Normalni sistem za parametra a in b se glasi

$$A^\mathsf{T} A x = A^\mathsf{T} y,$$

pri čemer je

$$A^\mathsf{T} A = \begin{bmatrix} 34 & 10\\ 10 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^\mathsf{T} y = \begin{bmatrix} 126\\ 36 \end{bmatrix}.$$

(c) Rešitev normalnega sistema lahko dobimo z Gaussovo eliminacijo razširjene matrike

$$\begin{bmatrix} 34 & 10 & 126 \\ 10 & 4 & 36 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 17 & 5 & 63 \\ 5 & 2 & 18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 9 & 0 & 36 \\ 5 & 2 & 18 \end{bmatrix}$$

od koder dobimo, da je $a = 4$ in $b = (18 - 20)/2 = -1$. Ocena za $f(0)$ je enaka

$$f(0) = a0 + b = b = -1.$$

2. Naj bosta $\mathbf{u} = [1, 1, 2]^\mathsf{T}$ in $\mathbf{v} = [2, 2, 1]^\mathsf{T}$ vektorja v $\mathbb{R}^3$.

(a) Zapiši projekcijsko matriko P na podprostor, ki ga napenjata vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$. *Matrike ni treba dejansko izračunati, ampak jo lahko pustiš v obliki produkta matrik manjših dimenzij.*

(b) Izračunaj $P\mathbf{x}$ za $\mathbf{x} = [1, 3, 2]^\mathsf{T}$.

(c) Izrazi vektor $P\mathbf{x}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$.

Rešitev

(a) Projekcijsko matriko lahko napišemo na več načinov. Opisal bom štiri.

Projekcija na $C(A)$

Prostor, ki ga napenjata vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ si lahko predstavimo kot stolpčni prostor matrike A s stolpci $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Projekcijsko matriko na $C(A)$ lahko zapišemo s formulo

$$P = A(A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T}.$$

Ker lahko rezultat pustimo v obliki produkta matrik, moramo izračunati le

$$(A^\mathsf{T}A)^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Projekcijska matrika je enaka

$$P = A(A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Projekcija na normalo

Podprostor, na katerega projeciramo, je ravnina v $\mathbb{R}^3$, zato si lahko pomagamo s projekcijo na normalo. Normalo $\mathbf{n}$ lahko poiščemo kot vektorski produkt $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ali pa kot bazo ničelnega prostora A^T:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Normala je netrivialna rešitev sistema $A^\mathsf{T}\mathbf{n} = 0$ na primer $\mathbf{n} = [1, -1, 0]^\mathsf{T}$. Projekcijsko matriko dobimo tako, da od identitete odštejemo projekcijo na normalo $\mathbf{n}$

$$P = I - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}}{\mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ortogonalna baza

Če bazo $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ ortogonaliziramo, je projekcijo enostavno izračunati. Vektor

$$\mathbf{q} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u} = [2, 2, 1]^\mathsf{T} - \frac{6}{6}[1, 1, 2]^\mathsf{T} = [1, 1, -1]^\mathsf{T}$$

je pravokoten na $\mathbf{u}$ in skupaj z $\mathbf{u}$ sestavljata ortogonalno bazo ravnine napete na $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$. Sedaj lahko uporabimo isto formulo kot pri projekciji na $C(A)$, s to razliko, da je matrika $(A^\mathsf{T}A)$ diagonalna

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Projekcija na ortogonalne bazne vektorje

Če poznamo ortogonalno bazo podprostora, lahko projekcijsko matriko zapišemo tudi kot vsoto projekcijskih matrik na posamezne bazne vektorje.

$$P = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^\mathsf{T}}{\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{u}} + \frac{\mathbf{q}\mathbf{q}^\mathsf{T}}{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{q}} = \frac{1}{6}[1, 1, 2]^\mathsf{T}[1, 1, 2] + \frac{1}{3}[1, 1, -1]^\mathsf{T}[1, 1, -1].$$

(b) Uporabimo npr. drugi zapis matrike P in izračunamo

$$P\mathbf{x} = \left(I - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}}{\mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{n}}\right)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Vektor $P\mathbf{x}$ želimo zapisati kot linearno kombinacijo vektorjev $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$. Če smo uporabili projekcijo na $C(A)$, smo koeficiente izračunali že po poti do $P\mathbf{x}$

$$P\mathbf{x} = A(A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T}\mathbf{x} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\-2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\-2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

Koeficienti v razvoju $P\mathbf{x}$ po $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ so ravno komponente vektorja $(A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T}\mathbf{x}$, se pravi

$$\mathbf{x} = \frac{2}{3}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{v}.$$

Če smo projekcijsko matriko zapisali kako drugače, moramo koeficiente v razvoju po $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ posebej izračunati. Rešiti moramo sistem za a in b, ki ga dobimo iz $\mathbf{x} = a\mathbf{u} + b\mathbf{b}$. Sistem ima razširjeno matriko

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\1 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\0 & 0 & 0\\0 & -3 & -2\end{bmatrix}$$

in po eliminaciji in vstavljanju dobimo $b = \frac{2}{3}$ in $a = 2 - 2\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

3. Naj bo B matrika

$$B = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\2 & 1 & 1 & 0\\3 & 2 & 1 & 1\\4 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Izračunaj determinante matrik B, $B - I$, $B^\mathsf{T}B$ ter $B^\mathsf{T}(B - I)$.

Rešitev Determinatni B in $B - I$ izračunamo, za produkta pa uporabimo lastnosti determinant. Determinanto B lahko izračunamo npr. z eliminacijo

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\2 & 1 & 1 & 0\\3 & 2 & 1 & 1\\4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\2 & 1 & 1 & 0\\-1 & -1 & -1 & 0\\4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\-1 & -1 & -1 & 0\\4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\\-1 & -1 & -1 & 0\\4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix} = 1.$$

Determinanto $B - I$ lažje izračunamo z razvojem po 1. vrstici in nato po tretjem stolpcu

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Če uporabimo lastnost determinant, dobimo

$$\det(B^\top B) = \det(B^\top)\det(B) = \det(B)^2 = 1$$

in

$$\det(B^\top(B - I)) = \det(B^\top)\det((B - I)) = 0.$$

4. Podana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči lastne vrednosti matrike A. *Odgovor utemelji!*

(b) Če je mogoče, matriko A diagonaliziraj. *Odgovor utemelji!*

Rešitev

(a) Ker je matrika spodnje trikotna, so lastne vrednosti enake kar diagonalnim elementom $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_2 = -3$ in $\lambda_3 = 2$.

(b) Matriko je mogoče diagonalizirati, če lahko iz lastnih vektorjev sesavimo bazo prostora $\mathbb{R}^4$. Ker pa ima dvojna lastna vrednost 1 le enodimenzionalni lastni podprostor, baze iz lastnih vektorjev ni mogoče sestaviti. Zato matrike A ni mogoče diagonalizirati.

Da je dimenzija lastnega podprostora za lastno vrednost $\lambda = 1$ res enaka 1, se lahko prepričamo, tako da preverimo, da je rang matrike $A - 1 \cdot I$ enak 3:

$$A - 1 \cdot I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{Vse odgovore dobro utemelji!}}$