Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Linearna algebra: 2. kolokvij

29. maj 2019

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si.* **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Na vektorskem prostoru matrik $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definiramo preslikavo s predpisom

$$\phi(X) = JX - XJ$$

za dano matriko

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) (5) Pokaži, da je $\phi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ linearna preslikava.
Rešitev: Za $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ velja

$$\phi(X+Y) = J(X+Y) - (X+Y)J = JX - XJ + JY - YJ = \phi(X) + \phi(Y).$$

Za $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ velja

$$\phi(\alpha X) = J(\alpha X) - (\alpha X)J = \alpha(JX - XJ) = \alpha\phi(X)$$

b) (10) Zapiši matriko, ki predstavlja ϕ v standardni bazi $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
Rešitev: Izračunamo vrednost ϕ za vsak standardni bazni vektor iz $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$.

$$\begin{aligned}
\phi(E_{11}) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -E_{12} \\
\phi(E_{12}) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{12} \\
\phi(E_{21}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = E_{11} - E_{21} - E_{22} \\
\phi(E_{22}) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{12},
\end{aligned}$$

od koder lahko preberemo matriko, ki predstavlja ϕ v tej bazi:

$$A_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) (10) Določi dimenziji za jedro $\ker(\phi)$ in sliko $\mathrm{im}(\phi)$.
Rešitev: Po Gaussovi eliminaciji ostane

$$A_\phi \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Imamo dva pivota in dve prosti spremenljivki, torej $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = \dim(\ker(\phi)) = 2$.

2. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) (10) Poišči ortonormirano bazo za stolpčni prostor A, $C(A)$.
Rešitev: Označimo stolpce matrike A z $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ in računamo nove ortogonalne bazne vektorje stolpčnega prostora $C(A)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dobljene vekorje še normiramo, da dobimo ortonormirano bazo za $C(A)$.

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{q}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) (5) Poišči ortonormirano bazo za ničelni prostor A^T, $N(A^\mathsf{T})$.
Rešitev: Po Gaussovi eliminaciji na A^T dobimo

$$A^\mathsf{T} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Za ortonormirano bazo (enodimenzionalnega) prostora $N(A^\mathsf{T})$ lahko vzamemo

$$\mathbf{q}_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) (10) Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{v} = [4, -1, -1, 4]^\mathsf{T}$ na $C(A)$.
Rešitev: Ker že imamo ortonormirano bazo $\{\mathbf{q}_4\}$ za $C(A)^\perp = N(A^\mathsf{T})$, je najlažji način, da od $\mathbf{v}$ odštejemo projekcijio $\mathbf{v}$ na $\mathbf{q}_4$.

$$\text{proj } \mathbf{v}_{C(A)} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}_4}{\mathbf{q}_4 \cdot \mathbf{q}_4}\mathbf{q}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. naloga (25 točk)

Podatke v tabeli

x	-2	-1	1	2
y	-1	1	-3	3

želimo aproksimirati s funkcijo oblike $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ v smislu linearne metode najmanjših kvadratov.

a) (5) Zapiši pripadajoč sistem linearnih enačb za parametra a in b. Zapiši matriko A in desno stran $\mathbf{b}$ tega sistema ($A\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right] = \mathbf{b}$).
Rešitev: Matrika sistema in desna stran sta

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b) (20) Poišči funkcijo f, ki v smislu linearne metode najmanjših kvadratov najbolje aproksimira podatke iz tabele, tj. tiste vrednosti za a in b, da bo $\|A\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right] - \mathbf{b}\|^2$ minimalno.
Rešitev: Matrika in desna stran normalnega sistema sta

$$A^\mathsf{T} A = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}, \ A^\mathsf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Rešitev normalnega sistema lahko dobimo z Gaussovo eliminacijo.

$$\left[\ A^\mathsf{T} A \mid A^\mathsf{T}\mathbf{b}\ \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

Funkcija, ki najbolje aproksimira podatke, je torej $f(x) = 2x - \frac{4}{x}$

4. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

a) (5) Določi lastne vrednosti matrike A.
Rešitev: Izračunamo karakteristični polinom matrike A:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -1-\lambda \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -1-\lambda \\ 0 & 1+\lambda & 0 \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2(1-\lambda), \end{aligned}$$

kar pomeni, da imamo lastne vrednosti $\lambda_{1,2} = -1$ in $\lambda = 1$.

b) (10) Če je možno, diagonaliziraj matriko A, tj. poišči diagonalno matriko D in obrnljivo matriko P, da bo $A = PDP^{-1}$, ali pa utemelji, zakaj to ni možno.
Rešitev: Bazi za lastna podprostora $N(A - \lambda_{2,1} I)$ in $N(A - \lambda_3 I)$ lahko določimo z Gaussovo eliminacijo.

$$\begin{aligned} \left[A - \lambda_{2,1} I\right] &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \left[A - \lambda_3 I\right] &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vidimo, da je $\dim N(A - \lambda_{2,1} I) = 2$, kar pomeni, da je A možno diagonalizirati. Ena možna izbira takih matrik D in P, da bo veljalo $A = PDP^{-1}$, je

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) (10) Izračunaj $A^{-2019} + A^{-2018}$.
Rešitev: Če opazimo, da velja

$$D^{-2019} = \begin{bmatrix} (-1)^{-2019} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{-2019} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{-2019} \end{bmatrix} = D \text{ in } D^{-2018} = \begin{bmatrix} (-1)^{-2018} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{-2018} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{-2018} \end{bmatrix} = I,$$

lahko brez računanja P^{-1} ugotovimo, da je

$$A^{-2019} + A^{-2018} = PD^{-2019}P^{-1} + PD^{-2018}P^{-1} = PDP^{-1} + PIP^{-1} = A + I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$