

## 2. kolokvij iz Linearne algebre (Ljubljana, 1. 6. 2017)

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega ali dveh A4 listov s formulami. Rezultati bodo objavljeni na [ucilnica.fri.uni-lj.si](http://ucilnica.fri.uni-lj.si).

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Naj bo  $A$  matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$U$  pa podmnožica vseh vektorjev  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ , za katere velja  $A\mathbf{x} = A^T\mathbf{x}$ .

- (a) Dokaži, da je  $U$  vektorski podprostor v  $\mathbb{R}^4$ .
- (b) Ali sta vektorja  $\mathbf{a} = [1, 1, 1, 1]^T$  in  $\mathbf{b} = [1, -1, 1, -1]^T$  vsebovana v  $U$ ?
- (c) Poišči bazo in določi dimenzijo podprostora  $U$ .

2. Dana je baza  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  prostora  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{a} = [1, 1, 1]^T, \quad \mathbf{b} = [1, 2, 1]^T, \quad \mathbf{c} = [0, 1, 1]^T.$$

Linearna preslikava  $\mathcal{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  preslika te vektorje po pravilih

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}, \quad \mathcal{F}(\mathbf{b}) = \mathbf{b} - \mathbf{c}, \quad \mathcal{F}(\mathbf{c}) = \mathbf{c} - \mathbf{a}.$$

- (a) Zapiši matriko  $A$ , ki pripada linearni preslikavi  $\mathcal{F}$  v bazi  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ .
- (b) Določi inverz  $P^{-1}$  prehodne matrike  $P = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ .
- (c) Poišči matriko  $B$ , ki pripada preslikavi  $\mathcal{F}$  v standardni bazi.
- (d) (*Dodatnih 5 točk.*) Določi jedro  $\ker \mathcal{F}$ . Ali je  $\mathcal{F}$  injektivna?

3. Vektorski podprostor  $V \subseteq \mathbb{R}^4$  je linearna ogrinjača vektorjev

$$\mathbf{v}_1 = [1, -1, 1, -1]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [1, 1, 3, -1]^T \text{ in } \mathbf{v}_3 = [2, 0, 4, -2]^T.$$

- (a) Kolikšna je dimenzija podprostora  $V$ ? Natančno utemelji!
- (b) Poišči *ortonormirano* bazo za  $V$ .
- (c) Poišči pravokotni projekciji vektorja  $[1, 1, 1, 1]^T$  na  $V$  in  $V^\perp$ .

4. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Pokaži, da je  $\lambda = -3$  lastna vrednost matrike  $A$  in poišči pripadajoči lastni vektor.
- (b) Pokaži, da je  $\mathbf{v} = [0, 1, -1]^T$  lastni vektor matrike  $A$  in določi pripadajočo lastno vrednost.
- (c) Poišči še tretjo lastno vrednost ter določi njeno algebraično in geometrično večkratnost.

Vse odgovore dobro utemelji!

## 2. kolokvij iz Linearne algebre (Ljubljana, 1. 6. 2017)

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega ali dveh A4 listov s formulami. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Naj bo  $A$  matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$U$  pa podmnožica vseh vektorjev  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ , za katere velja  $A\mathbf{x} = A^T\mathbf{x}$ .

- (a) Dokaži, da je  $U$  vektorski podprostor v  $\mathbb{R}^4$ .
- (b) Ali sta vektorja  $\mathbf{a} = [1, 1, 1, 1]^T$  in  $\mathbf{b} = [1, -1, 1, -1]^T$  vsebovana v  $U$ ?
- (c) Poišči bazo in določi dimenzijo podprostora  $U$ .

2. Dana je baza  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  prostora  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{a} = [1, 1, 1]^T, \quad \mathbf{b} = [1, 2, 1]^T, \quad \mathbf{c} = [0, 1, 1]^T.$$

Linearna preslikava  $\mathcal{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  preslika te vektorje po pravilih

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}, \quad \mathcal{F}(\mathbf{b}) = \mathbf{b} - \mathbf{c}, \quad \mathcal{F}(\mathbf{c}) = \mathbf{c} - \mathbf{a}.$$

- (a) Zapiši matriko  $A$ , ki pripada linearni preslikavi  $\mathcal{F}$  v bazi  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ .
- (b) Določi inverz  $P^{-1}$  prehodne matrike  $P = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ .
- (c) Poišči matriko  $B$ , ki pripada preslikavi  $\mathcal{F}$  v standardni bazi.
- (d) (*Dodatnih 5 točk.*) Določi jedro  $\ker \mathcal{F}$ . Ali je  $\mathcal{F}$  injektivna?

3. Vektorski podprostor  $V \subseteq \mathbb{R}^4$  je linearna ogrinjača vektorjev

$$\mathbf{v}_1 = [1, -1, 1, -1]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [1, 1, 3, -1]^T \text{ in } \mathbf{v}_3 = [2, 0, 4, -2]^T.$$

- (a) Kolikšna je dimenzija podprostora  $V$ ? Natančno utemelji!
- (b) Poišči *ortonormirano* bazo za  $V$ .
- (c) Poišči pravokotni projekciji vektorja  $[1, 1, 1, 1]^T$  na  $V$  in  $V^\perp$ .

4. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Pokaži, da je  $\lambda = -3$  lastna vrednost matrike  $A$  in poišči pripadajoči lastni vektor.
- (b) Pokaži, da je  $\mathbf{v} = [0, 1, -1]^T$  lastni vektor matrike  $A$  in določi pripadajočo lastno vrednost.
- (c) Poišči še tretjo lastno vrednost ter določi njeno algebraično in geometrično večkratnost.

Vse odgovore dobro utemelji!