Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

3. IZPIT, LINEARNA ALGEBRA, TEORETIČNI DEL
5. september 2023

(Na teoretičnem delu je 6 nalog, ki so skupaj vredne 100 točk.)

1. (20 točk) Kot običajno, označimo s $\cdot$ skalarni produkt vektorjev, ter s $\times$ vektorski produkt vektorjev. Ali za poljubne vektorje $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ veljajo naslednje lastnosti?
   - Če da, obkrožite DA, ni pa potrebno trditve dokazovati v desnem stolpcu. Pustite prazno.
   - Če ne, obkrožite NE in v desni stolpec zapišite primer vektorjev, za katere lastnosti ne veljajo.

	Ali trditev drži?	Protiprimer, če je odgovor "NE"
Če je $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, potem sledi $\vec{v} = \vec{w}$.	DA NE	
Če je $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$, potem sledi $\vec{v} = \vec{w}$.	DA NE	
$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$	DA NE	
$\left(\vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}\right) \perp \vec{v}$	DA NE	

2. (20 točk) Naj za matriko $A \in \mathbb{R}^{6\times 3}$ velja $\operatorname{rang}(A) = 3$.

   A. Zapišite primer takšne matrike A in takšnega neničelnega vektorja $\vec{b} \in \mathbb{R}^6$, za katerega linearni sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ nima rešitev.

   B. Naj bosta $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ in $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ takšna vektorja, da je $A\vec{u} = A\vec{v}$. Pokažite, da tedaj velja $\vec{u} = \vec{v}$.

3. (10 točk) Ali je vsaka neničelna kvadratna zgornje trikotna matrika obrnljiva? Če je, dokažite. Če ne, zapišite protiprimer.

4. (10 točk) Ali obstaja takšno pozitivno realno število α, da bo za vsako obrnljivo matriko $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ veljalo

$$\det(-3A^\top A^{-1}(AA^\top)^3) = \alpha \det(A)^6?$$

Če da, ga določite. Če ne, utemeljite, zakaj ne.

5. (20 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ matrika, za katero velja $A^4 = 0$.

   A. Zapišite primer takšne neničelne matrike.

   B. Pokažite, da je edina lastna vrednost matrike A enaka 0.

6. (20 točk) Katere od naslednjih trditev so resnične za poljubno $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$?

A. Če je $\operatorname{rang}(A) = 3$, potem je $\dim N(A^\mathsf{T}) = 3$.

B. Če je $\operatorname{rang}(A) = 3$, potem ima A vsaj eno lastno vrednost enako 3.

C. Če je $\det(A) = 0$, potem je A diagonalizabilna.

D. Če je $\det(A) = 0$, potem so vse lastne vrednosti A realne.

E. Če je A simetrična, so njene singularne vrednosti enake njenim lastnim vrednostim.

F. Če so lastne vrednosti matrike A enake 1, 2, 3, 4 in 5, potem ima $\mathbb{R}^5$ ortonormirano bazo sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A.

G. Če so lastne vrednosti matrike A enake 1, 2, 3, 4 in 5, potem je $\operatorname{rang}(A - 5I) = 1$.

H. Če so lastne vrednosti matrike A enake 1, 2, 3, 4 in 5, potem je $\operatorname{rang}(A + 5I) = 1$.

I. Če so lastne vrednosti matrike A enake 1, 2, 3, 4 in 5, potem je $\det(A^{-1}A^\mathsf{T}) = 1$.

J. Če so lastne vrednosti matrike A enake $-3, -2, -1, 2$ in 3, potem je $\det(A^{2023}) > 0$.

K. Če so lastne vrednosti matrike A enake $-1, -1, 0, 1$ in 1, potem $A + 2I$ ni obrnljiva matrika.

L. Če je A simetrična matrika in so njene lastne vrednosti enake $-1, -1, 0, 1$ in 1, potem ima $\mathbb{R}^5$ ortonormirano bazo sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A.

M. Če so lastne vrednosti matrike A enake $-1, -1, 0, 1$ in 1, potem je matrika AA^T obrnljiva.

N. Če so lastne vrednosti matrike A enake $-1, -1, 0, 1$ in 1, potem ima A štiri neničelne singularne vrednosti.

(Obkrožite vse pravilne odgovore. Za vsak napačno obkrožen odgovor boste dobili -2 točki. Pri tej nalogi odgovorov ni potrebno utemeljevati.)