Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: ____________________

3. IZPIT
LINEARNA ALGEBRA
25. avgust 2020

Splošni napotki:

- Čas pisanja: 105 minut.
- Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci.
- Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Vsako prepisovanje, pogovarjanje ali uporabljanje knjig, zapiskov, prenosnega telefona, slušalk ali drugih pripomočkov se bo sankcioniralo.
- Rešitve, točkovnik in rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*.
- **Vse odgovore dobro utemeljite!** Brez utemeljitve ne dobite točk.

TEORETIČNI DEL

1. (5 točk) Naj bosta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ dolžin $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 1$, in naj oklepata kot $\frac{\pi}{6}$. Izračunajte skalarni produkt vektorjev $\vec{a} + \vec{b}$ ter $\vec{a} - \vec{b}$.

2. (5 točk) Naj za obrnljivi matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja $(AB)^2 = A^2B^2$. Pokažite, da matriki A in B komutirata, torej, da je $AB = BA$.

3. (5 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dana matrika. Ali je množica vseh realnih $n \times n$ matrik X, za katere velja $AX = 0$, vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$?

4. (10 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{9\times 11}$ matrika ranga 7. Izračunajte (z utemeljitvijo):

   A. $\dim N(A)$

   B. $\dim C(A^\mathsf{T})$

   C. najmanjšo singularno vrednost matrike A.

5. (5 točk) Zapišite primer takšnih linearno neodvisnih vektorjev $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ in takšne neničelne linearne preslikave $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (ali njene matrike), da bosta $\varphi(\vec{a})$ ter $\varphi(\vec{b})$ linearno odvisna vektorja.

6. (5 točk) Zapišite primer takšne obrnljive matrike $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, katere stolpci so paroma ortogonalni in ne velja $P^{-1} = P^T$.

7. (5 točk) Če za $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja $A^2 = 0$, potem pokažite, da je 0 edina lastna vrednost matrike A.

8. (5 točk) Denimo, da sta si matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ podobni. Pokažite, da sta si tedaj tudi $A + I_n$ in $B + I_n$ podobni.

9. (5 točk) Zapišite primer nesimetrične obrnljive matrike $C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, za katero velja $\operatorname{rang}(C + I) = \operatorname{rang}(C - I) = 3$ ter $\operatorname{rang}(C + 2I) = \operatorname{rang}(C - 2I) = 4$.