Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

Naloge	1 – 6	7 – 13	Skupaj	Odstotek
Možne točke:	6	9	15	100
Dosežene točke:				

2. IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE 2018/19

24. junij 2019

Splošni napotki:

Izpit vsebuje 13 nalog in obsega 4 strani. Čas za reševanje je 45 minut.

Vsako prepisovanje, pogovarjanje ali uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona, slušalk ali drugih pripomočkov se bo sankcioniralo z odvzemom izpita.

Za vsako od trditev 1 – 6 obkrožite ali drži ali ne drži.
Če drži, utemeljite, zakaj. Če ne drži, zapišite protiprimer.

1. Če je matrika A obrnljiva, ima sistem $Ax = b$ neskončno rešitev.

DRŽI NE DRŽI

2. Ploščina paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a} + \vec{b}$ ter $\vec{a} - \vec{b}$ je dvakratnik ploščine, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ ter $\vec{b}$.

DRŽI NE DRŽI

3. Množica vseh 4×4 matrik, ki imajo vse vrstice enake, je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{4\times 4}$.

DRŽI NE DRŽI

4. $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

DRŽI NE DRŽI

5. Matrika $A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ je ortogonalna za vsak $\varphi \in \mathbb{R}$.

DRŽI NE DRŽI

6. Če je $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ ortogonalna množica v vektorskem prostoru V dimenzije 7 in v_i neničelni vektorji, potem je $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ baza prostora V.

DRŽI NE DRŽI

Odgovorite na vsako od vprašanj 7 – 13 in odgovor utemeljite.

7. Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki slika vektor $\vec{\imath}$ v $\vec{\jmath}$, vektor $\vec{\jmath}$ v $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$, vektor $2\vec{k}$ pa v $4\vec{\imath}$. Zapišite matriko, ki pripada τ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

8. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrika, katere stolpci so linearno neodvisni. Izračunajte $\dim N(A)$.

8. __________

9. Pokažite, da vsaka linearna preslikava $\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ slika linearno odvisne vektorje v linearno odvisne.

10. Simetrična matrika A naj ima karakteristični polinom enak $\Delta_A(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Izračunajte $\operatorname{rang}(A+I)$.

10. __________

11. Naj bo $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_5}$ ortonormirana baza $\mathbb{R}^5$ in $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v_1} + \ldots + \alpha_5 \vec{v_5}$. Pokažite, da je $||\vec{x}||^2 = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_5^2$.

12. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika, za katero velja $A^2 = A$. Pokažite, da je za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor $\vec{x} - A\vec{x}$ lastni vektor matrike A. Določite tudi pripadajočo lastno vrednost.

13. Naj bo Σ ravnina z normalo $\vec{n}$ in naj točka A leži na ravnini Σ. Naj točka T **ne** leži na ravnini Σ.

(a) Razdalja točke T do ravnine Σ enaka dolžini projekcije vektorja ________________ na vektor ________________.

(b) Kako bi s pomočjo točk A, T ter normale $\vec{n}$ izračunali kot med vektorjem $\vec{AT}$ in ravnino Σ?

(c) Izračunajte razdaljo točke T do ravnine Σ.