Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

Naloge	1 – 6	7 – 10	11 – 14	Skupaj	Odstotek
Možne točke:	24	24	16	64	100
Dosežene točke:					

1. IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE, A 2017/18

18. junij 2018

Splošni napotki:

- ☐ Izpit vsebuje 14 nalog in obsega 4 strani. Čas za reševanje je 45 minut.
- ☐ Vsako prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona, slušalk in drugih pripomočkov se bo sankcioniralo z odvzemom izpita.

Za vsako od trditev 1 – 6 obkrožite ali drži ali ne drži.
Če drži, utemeljite, zakaj. Če ne drži, zapišite protiprimer.

1. Vsaka linearno neodvisna množica vektorjev v $\mathbb{R}^9$ vsebuje vsaj 9 elementov.

DRŽI NE DRŽI

2. Če je matrika A diagonalizabilna, potem je tudi obrnljiva.

DRŽI NE DRŽI

3. Če sta premica p in ravnina Σ v $\mathbb{R}^3$ pravokotni, potem je vsak vektor na premici p vzporeden z normalo na ravnino Σ.

DRŽI NE DRŽI

4. Če so $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ linearno odvisno vektorji, potem je linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{x, y, z\}$ ravnina v $\mathbb{R}^3$ skozi koordinatno izhodišče.

DRŽI NE DRŽI

5. Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljivi matriki. Za vsako $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima enačba $AXB^{-1} = C$ natanko eno rešitev.

DRŽI NE DRŽI

6. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Če ima linearni sistem enačb $Ax = 0$ netrivialno rešitev, potem je 0 lastna vrednost matrike A.

DRŽI NE DRŽI

Pri vsakem od vprašanj 7 – 10 za vsako od trditev v pripadajoči kvadratek ☐ jasno označite, če je trditev pravilna ☑ oziroma napačna ☒.

Za vsak pravilen odgovor boste prejeli 2 točki, za vsak napačen pa -1 točko. Če pustite kvadratek prazen, dobite 0 točk.

7. Če sta $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ neničelna vektorja, kateri od naslednjih vektorjev je vedno pravokoten na vektor $\vec{a}$?

   ☐ $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$ ☐ $\vec{a} - \mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$

   ☐ $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}$ ☐ $\vec{b} - \mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$

   ☐ $\mathrm{proj}_{\vec{a}}(\vec{b})$ ☐ $\vec{a} - \mathrm{proj}_{\vec{a}}(\vec{b})$

   ☐ $\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$ ☐ $\vec{b} - \mathrm{proj}_{\vec{a}}(\vec{b})$

8. Katere od naslednjih matrik so simetrične za poljubni $n \times n$ simetrični matriki A in B?

   ☐ $A + B$ ☐ $A^T + 2B$ ☐ AB ☐ AA^T ☐ AB^T

9. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{5\times 8}$ matrika ranga 5. Katere od naslednjih trditev so resnične?

   ☐ Matrika A ima vseh pet vrstic neničelnih.

   ☐ Ničelni prostor matrike A je trivialen.

   ☐ Stolpci matrike A tvorijo bazo $\mathbb{R}^5$.

   ☐ Dimenzija stolpčnega prostora A je 8.

   ☐ Za vsak vektor $b \in \mathbb{R}^8$ ima sistem $Ax = b$ natanko eno rešitev.

   ☐ Obstaja vektor $b \in \mathbb{R}^8$, za katerega sistem $Ax = b$ nima rešitev.

10. Katere od naslednjih množic realnih $n \times n$ matrik so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^{n\times n}$?

   ☐ Matrike, ki imajo prvo vrstico ničelno.

   ☐ Matrike, ki imajo vsoto elementov v vsaki vrstici enako 1.

   ☐ Vse matrike A, za katere velja $A^2 = I$.

   ☐ Vse matrike A, ki so rešitve sistema $Ax = 0$.

   ☐ Vse matrike A, ki so rešitve sistema $Ax = b$ za nek neničeln $b \in \mathbb{R}^n$.

Odgovorite na vsako od vprašanj 11 – 14 in odgovor utemeljite.

11. Če je $A \in \mathbb{R}^{7\times 11}$ matrika ranga 5, izračunajte $\dim N(A)$.

11. ____________

12. Če je $\det A = 5$ in $\det B = 3$, izračunajte $\det(A^T BAB^{-1})$.

12. ____________

13. Naj bo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki slika vektor $\vec{i}$ v $\vec{j}$, vektor $\vec{j}$ v $\vec{0}$, vektor $\vec{k}$ pa v $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Zapišite matriko, ki pripada T v standarni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

14. Za 4×4 matriko A naj velja $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A-I) = 4$, $\operatorname{rang}(A-2I) = \operatorname{rang}(A-3I) = 3$ ter $\operatorname{rang}(A-4I) = 2$. Določite njen karakteristični polinom.